

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Ingegneria

Corso di Dottorato in Ingegneria Aerospaziale

XVII Ciclo

Tesi di Dottorato

**Ottimizzazione di Traiettorie di Veicoli Spaziali Dotati di
Apparati Propulsivi a Bassa Spinta**



Tutore

Prof. Giovanni MENGALI

Candidato

Alessandro A. QUARTA

Direttore del Corso di Dottorato

Prof. Guido BURESTI

FEBBRAIO 2005

Macte animo, generose puer, sic itur ad astra...

(Virgilio, 19 A.C.)

Sommario

L'obiettivo di questa Tesi è quello di studiare le leggi di controllo ottime e quasi-ottime in una traiettoria di trasferimento per veicoli spaziali dotati di propulsori a bassa spinta, ponendo particolare attenzione alle vele solari ed ai propulsori elettrici alimentati attraverso generatori di potenza fotovoltaici. L'ottimizzazione della traiettoria è stata effettuata utilizzando un approccio indiretto, basato cioè sull'utilizzo della teoria classica del calcolo variazionale. Questo ha permesso di ottenere in forma analitica (o semi-analitica) le leggi di controllo ottime e di determinare come queste siano correlate con le caratteristiche dei sistemi propulsivi considerati. Un'altro aspetto importante è che i risultati delle simulazioni ottenibili con questa metodologia consentono di stimare in maniera soddisfacente, nei limiti del modello considerato e delle tolleranze di integrazione scelte, le caratteristiche della traiettoria ottima di trasferimento reale.

Per quel che riguarda le vele solari sono state analizzate sia traiettorie di trasferimento interplanetario verso pianeti esterni ed interni, che traiettorie di innalzamento orbitale e fuga dalla Terra, prendendo in considerazione il comportamento termo-ottico reale della vela e la sua curvatura dovuta alla pressione di radiazione solare. La legge ottima è stata determinata sia nel caso di trasferimento piano che tridimensionale e, relativamente alle orbite attorno alla Terra, è stata analizzata l'influenza delle principali perturbazioni orbitali sui parametri caratteristici della missione.

Per qual che riguarda i propulsori elettrici è stata studiata la legge di controllo ottima nel caso di un trasferimento interplanetario, tenendo conto delle reali prestazioni del sistema propulsivo e della degradazione dell'efficienza del sistema di generazione di potenza fotovoltaico. L'analisi condotta ha permesso di determinare la massa minima di propellente necessaria ad effettuare il trasferimento, in funzione dell'accuratezza con cui viene modellata l'efficienza del propulsore in funzione dell'impulso specifico fornito.

Prefazione e ringraziamenti

Questa Tesi è il frutto del mio lavoro di ricerca condotto nell'ambito del Corso di Dottorato in Ingegneria Aerospaziale (XVII ciclo), svolto al Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale dell'Università di Pisa sotto la supervisione del Prof. G. Mengali, nel periodo di tempo che va dal Gennaio 2002 al Dicembre 2004.

Una parte del materiale presente in questa Tesi è stata pubblicata nei seguenti articoli:

- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Time-Optimal Three-Dimensional Trajectories for Solar Photon Thruster Spacecraft*”, accettato per la pubblicazione, Journal of Spacecraft and Rockets.
- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Fuel-Optimal, Power-Limited Rendezvous with Variable Thruster Efficiency*”, accettato per la pubblicazione, Journal of Guidance, Control and Dynamics.
- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Optimum Three-Dimensional Interplanetary Rendezvous Using Non-ideal Solar Sail*”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 28, No. 1, January-February 2005, pp. 173–177.
- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Earth Escape by Ideal Sail and Solar-Photon Thruster Spacecraft*”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 27, no. 6, pp. 1105–1108.
- A.A. Quarta e G. Mengali, “*Studio di Traiettorie Interplanetarie di Sonde Utilizzanti Propulsori a Bassa Spinta*”, XVII Congresso Nazionale AIDAA, Roma.

mentre una parte è attualmente ancora in fase di revisione:

- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Near-Optimal Solar Sail Orbit-Raising from Low Earth Orbit*”, sottoposto a revisione, Journal of Spacecraft and Rockets.
- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Optimal Heliostationary Missions of High Performance Sailcraft*”, sottoposto a revisione, Acta Astronautica.

- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Compound Solar Sail with Optical Properties: Models and Optimal Trajectories*”, sottoposto a revisione, Journal of Spacecraft and Rockets.

Durante il Corso di Dottorato sono stati inoltre affrontati, in maniera complementare a quelli presenti in questa Tesi, degli argomenti riguardanti la dinamica ed il controllo di veicoli spaziali, l’ottimizzazione di traiettorie balistiche nel sistema Terra-Luna e lo studio di un velivolo non abitato (UAV) ad uso civile. Una parte di questo lavoro è stato pubblicato nei seguenti articoli:

- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Optimization of Bi-Impulsive Trajectories in Restricted Three-Body Systems*”, accettato per la pubblicazione, Journal of Guidance, Control and Dynamics.
- C. Casarosa, R. Galatolo, G. Mengali e A.A. Quarta, “*Safety Requirements Impact on the Flight Systems and Weight of Civilian Unmanned Aerial Vehicles*”, Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Volume 76, No 6, December 2004, pp. 600-606.
- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Spacecraft control with constrained fast reorientation and accurate pointing*”, The Aeronautical Journal, February 2004, pp. 85–91.
- C. Casarosa, G. Mengali e A.A. Quarta, “*Sulla Realizzazione di un Banco Prova per la Simulazione del Volo di Velivoli non Abitati*”, XVII Congresso Nazionale AIDAA, Roma.
- G. Mengali e A.A. Quarta, “*Dinamica e Controllo di un Telescopio Orbitale*”, XVII Congresso Nazionale AIDAA, Roma.

Desidero ringraziare sentitamente il mio tutore ed amico Prof. Giovanni Mengali sia per il suo fondamentale ed insostituibile apporto a questo lavoro di ricerca, che per la sua pazienza, correttezza ed umanità dimostratemi più volte durante questi ultimi anni. Desidero ringraziare inoltre il Prof. Carlo Casarosa per il sentito supporto ed il continuo incoraggiamento, e tutte le persone del Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale che hanno in qualche modo hanno reso possibile tutto questo. Un ringraziamento particolare va alla mia Famiglia, Tina e Vito, per aver creduto nelle mie possibilità e per avermi in ogni tempo ed in ogni modo aiutato durante tutti i miei studi anche nei momenti più difficili. Infine, ma certamente non ultima nei miei pensieri, ringrazio Luisa per aver dato un senso a tutto questo lavoro.^λ

Indice

Sommario	I
Prefazione e ringraziamenti	II
Elenco dei simboli	VII
Introduzione	1
I Vele Solari	5
1 Introduzione alle vele solari	6
1.1 Introduzione	6
1.2 La storia	6
1.2.1 I pionieri	6
1.2.2 Un rinnovato interesse	8
1.2.3 La svolta: il <i>rendez-vous</i> con la cometa di Halley	9
1.3 Lo stato attuale della ricerca	10
2 Modello della Spinta Generata dalla Vela Solare	15
2.1 Introduzione	15
2.2 Pressione di radiazione solare	15
2.3 Parametro di snellezza della vela	16
2.4 Sistemi di riferimento	16
2.5 Vela convenzionale	17
2.5.1 Modello di forza ideale	18
2.5.2 Modello di forza ottico	21
2.5.3 Modello di forza parametrico	24
2.6 Vela composta o SPT	26
2.6.1 Componenti della vela	27

2.6.2	Parametri di progetto	30
2.6.3	Ipotesi semplificative e scelte di progetto	33
2.6.4	Modello di forza ideale	37
2.6.5	Modello di forza ottico	38
2.7	Regione dei controlli ammissibili \mathcal{U}	48
2.8	Accelerazione caratteristica della vela	50
2.9	Conclusioni	50
3	Traiettorie Ottime di <i>Rendez-Vous</i> Interplanetario	52
3.1	Introduzione	52
3.2	Equazioni del moto	53
3.2.1	Vela convenzionale	54
3.2.2	Vela composta	55
3.3	Formulazione del problema variazionale	57
3.3.1	Equazioni di Eulero-Lagrange	59
3.4	Legge di controllo ottima	60
3.4.1	Vela convenzionale	61
3.4.2	Vela composta	66
3.5	Il problema differenziale	71
3.6	Il problema dei due punti	72
3.6.1	Algoritmo di soluzione	72
3.7	Simulazioni ed analisi dei risultati	73
3.7.1	Vela convenzionale	74
3.7.2	Vela composta	76
3.8	Conclusioni	79
4	Traiettorie Localmente-Ottime	82
4.1	Introduzione	82
4.2	Traiettorie di fuga dalla Terra	82
4.2.1	Equazioni del moto	83
4.2.2	Legge di controllo quasi-ottima	85
4.2.3	Simulazioni ed analisi dei risultati	87
4.3	Innalzamento orbitale	90
4.3.1	Equazioni del moto	92
4.3.2	Legge di controllo quasi-ottima	93
4.3.3	Simulazioni ed analisi dei risultati	98
4.4	Conclusioni	101

5	Missioni con Vele Solari ad Alte Prestazioni	104
5.1	Introduzione	104
5.2	Condizione di eliostazionarietà	105
5.3	Missioni eliostazionarie di minimo tempo	106
5.3.1	Equazioni del moto	106
5.3.2	Accelerazione della vela	107
5.3.3	Formulazione del problema variazionale	108
5.3.4	Condizioni al bordo	110
5.3.5	Legge di controllo ottima	112
5.4	Simulazioni ed analisi dei risultati	113
5.4.1	Orbita di parcheggio circolare	114
5.4.2	Orbita di parcheggio ellittica	114
5.4.3	Distanza eliocentrica finale vincolata	118
5.5	Conclusioni	119
II	Propulsori Elettrici	121
6	Traiettorie interplanetarie di minimo consumo	122
6.1	Introduzione	122
6.2	Equazioni del moto	124
6.2.1	Schematizzazione del veicolo spaziale	124
6.3	Formulazione del problema variazionale	125
6.3.1	Equazioni di Eulero-Lagrange	126
6.4	Legge di controllo ottima	126
6.4.1	Valore ottimo di $\hat{\mathbf{a}}_{SEP}$	127
6.4.2	Valore ottimo di τ	127
6.4.3	Valore ottimo di I_{sp}	128
6.5	Simulazioni ed analisi dei risultati	132
6.5.1	Missioni verso Marte con un sistema NSTAR	134
6.5.2	Missioni verso Marte con un sistema NEXT	134
6.6	Conclusioni	135
A	Costanti fisiche e parametri planetari utilizzati	139
	Bibliografia	141
	Elenco delle figure	147
	Elenco delle tabelle	153
	Elenco degli acronimi	154

Elenco dei Simboli

<u>Simboli latini</u>			
\mathcal{E}	energia meccanica specifica	$c_{1...3}$	coefficienti di forza nel modello di forza parametrico dipendenti da $\mathbf{c}_{1...3}$
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	coefficienti di forza nella vela composta reale	D	diametro massimo della vela composta
$\mathcal{T}(r, \theta)$	sistema di riferimento polare	$d_{1...5}$	coefficienti relativi alle prestazioni dei pannelli solari
$\mathcal{T}(x, y, z)$	sistema di riferimento cartesiano	e	eccentricità
\mathcal{U}	regione dei controlli ammissibili	F	fuoco ottico
$\mathbf{c}_{1...3}$	coefficienti di forza nel modello di forza parametrico	f	parametro
f	parametro	g_0	accelerazione di gravità terrestre standard
A	superficie riflettente della vela	H	Hamiltoniana
a_c	accelerazione caratteristica della vela	H'	Hamiltoniana ridotta
A_{\square_p}	superficie riflettente proiettata di \square	I_{sp}	impulso specifico
a_{p_0}	accelerazione massima nel modello di forza parametrico	J	funzionale
B	coefficiente di non-Lambertianità della superficie riflettente	L	lunghezza totale della vela composta
$b_{1...3}$	coefficienti di forza della vela	L_{\odot}	luminosità solare
c	velocità della luce nel vuoto	m	massa totale del veicolo spaziale
C_D	coefficiente di resistenza della vela	O	centro geometrico
c_k	coefficienti che definiscono η	P	pressione di radiazione solare
C_L	coefficiente di portanza della vela	P_L	potenza assorbita dal carico pagante
		P_P	potenza in ingresso alla PPU
		P_T	potenza in ingresso al propulsore

P_{SA}	potenza in uscita dai pannelli solari	η_P	efficienza della PPU
q	parametro che indica il modello della vela	λ_m	variabile aggiunta alla massa
R	raggio geometrico	μ	parametro gravitazionale
r	distanza dal centro di attrazione	ν	anomalia vera
s	frazione dei fotoni riflessi specularmente dalla vela	Ω	ascensione retta del nodo ascendente
t	tempo	ω	argomento del periasse
v_b	velocità termica media	Φ_E	flusso solare
W	potenza solare in ingresso alla vela composta	ρ	coefficiente di riflessione
DU	unità di distanza	σ_n, σ_t	coefficienti di accomodamento
MU	unità di massa	τ	parametro di controllo del propulsore
TU	unità di tempo	θ	angolo di spinta
$\hat{\mathbf{a}}$	versore accelerazione	ξ_0	angolo di apertura del collettore
$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$	versori della terna \mathcal{T}	ξ_1	angolo della zona in ombra nel collettore
$\hat{\mathbf{n}}$	versore normale alla vela	ζ	complementare dell'angolo di incidenza della vela
$\hat{\mathbf{r}}$	versore posizione	i	inclinazione
$\hat{\mathbf{v}}$	versore velocità	$\boldsymbol{\lambda}_r$	vettore delle variabili aggiunte alla posizione
\mathbf{a}	vettore accelerazione	$\boldsymbol{\lambda}_v$	primer vector
\mathbf{e}	vettore degli errori	\mathbf{F}	vettore di spinta
\mathbf{r}	vettore posizione	\mathbf{x}	vettore di stato
\mathbf{u}	vettore dei controlli	<u>Apici</u>	
\mathbf{v}	vettore velocità	'	unico materiale riflettente
<u>Simboli greci</u>		(p)	pianeta
α	angolo di cono	*	valore critico
β	parametro di snellezza della vela	·	derivata temporale
χ	fattore di concentrazione	$\tilde{\square}$	valore di \square che rende stazionaria H'
δ	angolo di azimut	p	parametro indicante la vela
ϵ	coefficiente di emissività		
η	efficienza del propulsore		

Pedici

0	iniziale
λ	primer vector
$\♂$	Marte
max	massimo
min	minimo
$\odot s$	Sole-vela
\odot	Sole
\oplus	Terra
θ	tangenziale
$\♀$	Venere
b	superficie in ombra

c	collettore
d	direttore
f	finale
fr	superficie illuminata
i	ideale
o	ottico
orb	orbitale
p	parametrico
r	riflettore o radiale
SEP	propulsore elettrico
v	velocità

Introduzione

Lo studio della traiettoria riveste un'importanza fondamentale nell'analisi di una missione spaziale. Nella determinazione della traiettoria devono essere considerati tutti i vincoli non solo legati al corretto funzionamento dei sistemi di bordo, ma anche e soprattutto alle prestazioni offerte dall'apparato propulsivo. Infatti tra tutti i sistemi in cui è possibile suddividere un veicolo spaziale, è proprio quello propulsivo ad influenzare in maniera determinante la selezione del percorso da seguire in una assegnata missione.

Sotto questo punto di vista è uso comune classificare le traiettorie spaziali, siano esse attorno ad un pianeta o nello spazio interplanetario, in traiettorie balistiche (o ad alta spinta) ed in traiettorie a bassa spinta. Nelle prime il propulsore, che permette di impartire al veicolo spaziale un'accelerazione non trascurabile rispetto a quella di gravità locale, funziona per un intervallo di tempo molto piccolo se paragonato ai tempi caratteristici della missione. Questo tipo di traiettorie sono state utilizzate fin dagli albori dell'astronautica e costituiscono, allo stato attuale della ricerca, ancora la scelta più naturale nella progettazione di una qualsiasi missione spaziale, grazie all'affidabilità raggiunta dopo numerose prove sul campo.

Al contrario, nelle traiettorie a bassa spinta il propulsore, capace di impartire al veicolo spaziale un'accelerazione di piccola entità se paragonata all'attrazione gravitazionale locale, funziona per un periodo di tempo molto lungo, fino a coprire la quasi totalità della missione. Gli intervalli di tempo in cui la spinta è attiva comportano una complicazione sostanziale nella scelta dei parametri di controllo come la direzione e l'entità della spinta da fornire al veicolo spaziale. Quest'aspetto ha reso lo studio delle traiettorie a bassa spinta particolarmente interessante da un punto di vista analitico e numerico, grazie anche alla possibilità di effettuare in questo caso tutta una serie di missioni spaziali altrimenti impossibili con i sistemi propulsivi convenzionali.

In quest'ottica riveste un'importanza fondamentale l'ottimizzazione della traiettorie in quanto, oltre a soddisfare tutti i vincoli di missione, i parametri di controllo possono essere scelti in maniera tale da massimizzare (o minimizzare) un assegnato indice di prestazione. Quest'ultimo è legato sostanzialmente alle caratteristiche del veicolo spaziale in oggetto

e può dipendere anche dalle specifiche della missione considerata. Una scelta abbastanza comune per ridurre i costi di lancio, nel caso si utilizzino sistemi propulsivi elettrici che fanno variare la massa del veicolo spaziale, è quella di minimizzare la massa di propellente necessaria ad effettuare un dato trasferimento. Quando invece la spinta è legata direttamente all'utilizzo della radiazione solare incidente, come accade nelle vele solari, e la massa del veicolo spaziale non varia durante la missione, un indice di prestazione naturale è il tempo totale necessario ad effettuare il trasferimento.

L'obiettivo di questa Tesi è quello di studiare le leggi di controllo ottime e quasi-ottime in una traiettoria di trasferimento per veicoli spaziali dotati di propulsori a bassa spinta, ponendo particolare attenzione alle vele solari ed ai propulsori elettrici alimentati attraverso generatori di potenza fotovoltaici. L'ottimizzazione della traiettoria è stata effettuata utilizzando un approccio indiretto, basato cioè sull'utilizzo della teoria classica del calcolo variazionale. Questo ha permesso di ottenere in forma analitica (o semi-analitica) le leggi di controllo ottime e di determinare come queste siano correlate con le caratteristiche dei sistemi propulsivi considerati. Un'altro aspetto importante è che i risultati delle simulazioni ottenibili con questa metodologia consentono di stimare in maniera soddisfacente, nei limiti del modello considerato e delle tolleranze di integrazione scelte, le caratteristiche della traiettoria ottima di trasferimento reale.

Organizzazione della Tesi

La Tesi è stata suddivisa in due parti. La Parte I riguarda lo studio e l'ottimizzazione delle traiettorie, sia terrestri che eliocentriche, relative ad un veicolo spaziale il cui sistema di propulsione principale è costituito da una vela solare. Nella Parte II sono state indagate invece le traiettorie ottime di trasferimento interplanetario di una sonda dotata di un propulsore elettrico alimentato attraverso pannelli solari, considerando un modello reale del sistema propulsivo.

Nel Capitolo 1 è stata introdotta la propulsione a vela solare, ripercorrendo brevemente le principali tappe che hanno portato alla situazione tecnologica attuale e presentando alcuni dati che permettono di ipotizzare quali saranno le prestazioni di questi sistemi propulsivi in un futuro prossimo.

Nel Capitolo 2 sono stati introdotti ed analizzati i modelli matematici che permettono di schematizzare il comportamento di una vela solare in funzione della sua geometria e del suo assetto. Sono stati individuati in particolare i legami esistenti tra il modulo e la direzione della spinta generata dalla vela, attraverso l'interazione con la pressione di radiazione solare, e gli angoli di controllo caratteristici. L'analisi è stata condotta sia per le vele solari più comuni, come ad esempio quella piana, che per le vele solari non convenzionali, come ad esempio la vela composta. Per quest'ultima è stato sviluppato un

modello di spinta che tiene conto anche delle caratteristiche termo-ottiche del materiale riflettente e che costituisce un contributo originale del lavoro.

Nel Capitolo 3 sono state analizzate le traiettorie di trasferimento ottime, dal punto di vista del tempo di missione, in un problema classico di *rendez-vous* interplanetario utilizzando un metodo indiretto. In particolare sono state studiate le leggi di controllo ottime per una vela convenzionale in tre livelli di approssimazione e per una vela composta in due livelli di approssimazione. Alcune delle leggi di controllo ricavate, riguardanti sia una vela convenzionale che una vela composta, costituiscono un contributo originale del lavoro.

Nel Capitolo 4 sono state studiate le traiettorie quasi-ottime riguardanti una vela solare, convenzionale e composta, in una missione planetocentrica. Supponendo la superficie della vela perfettamente riflettente sono state ricavate le leggi di controllo analitiche quasi-ottime che permettono di studiare sia una traiettoria di innalzamento orbitale da orbita terrestre bassa che una traiettoria di fuga dalla Terra. In quest'analisi sono state considerate tutte le maggiori fonti di perturbazione orbitale ed è stato studiato in dettaglio l'effetto, non trascurabile, che la resistenza dell'atmosfera residua esercita sulla legge di controllo quasi-ottima. Lo studio è stato completato da un'intensiva serie di simulazioni che hanno mostrato come le perturbazioni orbitali influenzino da un punto di vista quantitativo il tempo di missione sia in un problema di innalzamento orbitale che in una traiettoria di fuga. Alcuni risultati di questo studio, come ad esempio la legge di controllo quasi-ottima in presenza di resistenza atmosferica, rappresentano un contributo originale del lavoro.

Nel Capitolo 5 sono state studiate le traiettorie di trasferimento verso una condizione di equilibrio di una vela solare ad alte prestazioni. Utilizzando una formulazione bidimensionale ed un opportuno sistema di unità canoniche sono state ottenute le caratteristiche dell'orbita di trasferimento in maniera indipendente dal raggio dell'orbita di partenza, supposta per semplicità circolare. L'analisi è stata estesa anche al caso di orbita di partenza ellittica attraverso una serie di simulazioni numeriche, per una vela convenzionale e composta. I risultati ottenuti, per quel che riguarda la partenza da orbita ellittica e lo studio di tali traiettorie con vele reali, costituiscono un contributo originale del lavoro.

Nel Capitolo 6 sono state studiate le traiettorie ottime, dal punto di vista del consumo di propellente, per una sonda interplanetaria dotata di un propulsore elettrico ed alimentata da un sistema di generazione di potenza a pannelli solari. In particolare, utilizzando un metodo indiretto, è stata ricavata a legge di controllo ottima che permette di tenere in conto il reale comportamento del propulsore. L'analisi è stata completata da una serie di simulazioni in cui sono stati considerati due differenti apparati propulsivi, le cui caratteristiche sono state ricavate direttamente utilizzando i dati sperimentali reperibili in letteratura. La legge di controllo così ricavata permette inoltre di includere eventuali tratti di volo per inerzia causati dallo spegnimento del propulsore e costituisce un contributo

originale del lavoro.

Nell'Appendice A è stato infine riportato il sistema di costanti ed i parametri planetari utilizzati nella simulazioni al calcolatore effettuate nella Tesi.

Parte I

Vele Solari

1

Introduzione alle vele solari

1.1 Introduzione

La spinta generata da una vela solare è una forma di propulsione innovativa che si differenzia da tutti gli altri sistemi propulsivi finora utilizzati in ambito spaziale. La caratteristica che rende unica nel suo genere la propulsione a vela solare consiste nel fatto che la spinta non viene prodotta espellendo dal veicolo spaziale nessun tipo di propellente, ma sfruttando la quantità di moto dei fotoni di cui la luce è composta. Inoltre, poiché utilizza una sorgente virtualmente illimitata di energia come il Sole, la vela solare può teoricamente essere accelerata in maniera indefinita e continua. L'unico limite è costituito solamente dalla vita operativa del materiale riflettente montato sulla vela stessa.

Le vele solari rendono possibili tutta una classe di missioni inimmaginabili con i sistemi propulsivi considerati comunemente convenzionali^[1;2]. Queste missioni spaziano dal *rendez-vous* con comete e piccoli corpi^[3] del Sistema Solare, al classico trasferimento interplanetario^[4] fino ad arrivare a missioni verso l'eliopausa, all'esplorazione dello spazio interstellare^[5;6] e di altri sistemi planetari^[7].

In questo Capitolo verrà delineata la storia della propulsione basata sull'utilizzo di una vela solare, ponendo particolare attenzione alle tappe fondamentali che hanno portato alla situazione tecnologica attuale.

1.2 La storia

1.2.1 I pionieri

I primi scienziati a studiare l'utilizzo della pressione di radiazione solare come sorgente propulsiva furono i pionieri Russi della meccanica del volo spaziale, intorno all'inizio degli anni '20 del secolo scorso. Tra di questi è il caso di citare Konstantin Tsiolkovsky e Fridrickh Arturovich Tsander il quale nel 1924 scrisse: "... per attraversare lo spazio interplanetario io sto lavorando sull'idea di volare, utilizzando dei grandi specchi su dei pannelli

estremamente sottili, capaci di raggiungere risultati molto interessanti...”. Risulta noto tra l’altro che nello stesso articolo Tsander propose la costruzione e l’utilizzo di grandi stazioni spaziali in orbita attorno alla Terra. All’epoca in cui furono scritte queste poche righe era già ben noto come la luce potesse esercitare una pressione su di una superficie, grazie alla teoria dell’elettromagnetismo sviluppata nel 1860 da James Clerk Maxwell e più volte dimostrata in molti esperimenti fisici nel secolo seguente. Fu infatti Maxwell stesso a descrivere la luce come una serie di “pacchetti” di energia che agiscono come un flusso di “particelle piccolissime”. Queste “particelle”, note con il termine di fotoni, obbediscono alle leggi fisiche del moto. Infatti, in maniera espressiva, i fotoni possiedono un’energia ed una quantità di moto che viene trasformata, attraverso la vela solare, in quantità di moto utile allo spostamento di un corpo.

Il primo serio articolo tecnico riguardante l’utilizzo di una vela solare come sistema propulsivo principale per voli spaziali, fu quello dal titolo “*Clipper Ships of Space*”, scritto da Carl Wiley e pubblicato nel maggio del 1951 sulla rivista (non tecnica) *Astounding Science Fiction* (cfr. Figura 1.1). Non deve infatti sorprendere che le vele solari furono



Figura 1.1: Illustrazione tratta dalla prima pubblicazione riguardante una vela solare: “*Clipper Ships of Space*”, scritto da Carl Wiley nel 1951 su *Astounding Science Fiction*.

inizialmente menzionate nell’ambito della fantascienza, quando infatti nel ventesimo secolo furono parecchi i racconti di fantasia ispirati dalla possibilità di effettuare voli interplanetari ed interstellari sfruttando la luce del Sole. Per questo motivo, e per non perdere di fatto la sua credibilità scientifica Wiley, un ingegnere aeronautico, pubblicò il suo articolo sotto lo pseudonimo di Russell Saunders. Infatti in quegli stessi anni vi era un ostentato scetticismo da parte della comunità scientifica internazionale verso l’idea, considerata piuttosto esotica, dell’utilizzo della pressione di radiazione solare come sistema propulsivo primario. Tra l’altro nello stesso numero della rivista in cui comparve l’articolo di Wiley, vi fu un commento ironico di Willy Ley in cui l’idea di impiegare realmente una vela solare

veniva bollata come improponibile in un'era in cui "...i razzi avevano aperto lo spazio ed avevano permesso la costruzione di satelliti artificiali". All'inizio degli anni '70 Wiley, passato in forza alla Rockwell, durante un convegno al JPL (Jet Propulsion Laboratory) di Pasadena riuscì ad avere la sua rivincita quando fu invitato ad esporre le sue idee e fu presentato come uno dei pionieri della propulsione a vela solare.

Il primo articolo tecnico pubblicato su di una rivista professionale fu scritto nel 1958 da Richard Gamin, un consulente IBM del Dipartimento della Difesa. L'articolo di Gamin fu pubblicato su *Jet Propulsion* ed incluse, per la prima volta, la stima approssimata delle prestazioni di un veicolo spaziale propulso con vela solare. All'articolo di Gamin, diventato poi un consulente NASA negli anni '70, seguirono negli anni successivi diversi articoli tecnici pubblicati dalla NASA e dai centri di ricerca universitari.

1.2.2 Un rinnovato interesse

All'inizio degli anni '60, l'amministratore dell'epoca alla NASA James Fletcher, in seguito ai contatti avuti con Gamin, commissionò una serie di studi sull'argomento vele solari. Questi studi furono affidati a Jerome Wright che in quei tempi lavorava al Battelle Memorial Institute in Ohio. In realtà, già nel 1958, Ted Cotter al Los Alamos Scientific Laboratory aveva sommariamente studiato la possibilità di realizzare una vela solare stabilizzata a spin. Cotter scriverà ancora nei primi anni '60 degli articoli brevi riguardanti gli aspetti più tecnici dell'utilizzo della vela solare, meritandosi addirittura un editoriale della rivista *Time* nel 1958 dal titolo "*Trade Winds in Space*". Nel 1960 Philippe Villers scrisse la sua tesi di dottorato sulle vele solari al Massachusetts Institute of Technology (cfr. Figura 1.2) e nello stesso anno fu organizzato al NASAs Langley Research Center una conferenza sulle tecniche di propulsione a vela solare, mentre l'anno seguente un corso sullo stesso argomento fu tenuto alla Università della California a Los Angeles.

Da un punto di vista tecnico gli scienziati si interessarono innanzitutto sulle vele stabilizzate a spin per poi considerare delle vele rigide stabilizzate a tre assi. Tra il 1965 ed il 1967 Richard MacNeal e John Hedgepath inventarono la vela cosiddetta *heliogyro*, vale a dire una vela rotante in maniera simile ad un comune elicottero. La NASA iniziò da parte sua degli studi seri nella metà degli anni '60, vagliando tutte le tecnologie disponibili all'epoca per la realizzazione di una vela solare senza far riferimento ad una ben particolare missione scientifica. Tuttavia gli sforzi profusi in quegli anni per portare a compimento il progetto Apollo spinsero la NASA alla cancellazione degli studi sulle vele solari e fino alla metà degli anni '70 quest'argomento rimase pressoché inesplorato se si eccettuano appunto dei piccoli studi di Jerome Wright al Battelle Institute. Il lavoro di Wright, finanziato dalla NASA, aveva come scopo principale quello di studiare la configurazione di lancio e le richieste propulsive per alcune missioni che a quei tempi erano state considerate come fattibili. In quello studio Wright analizzò in dettaglio la possibilità di utilizzare le vele solari come mezzo propulsivo per raggiungere i pianeti del Sistema Solare.

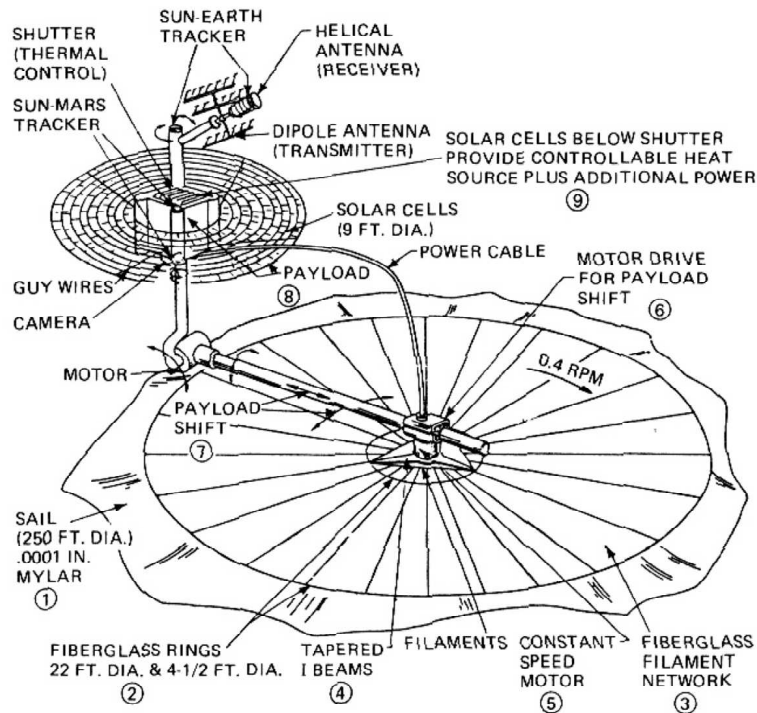


Figura 1.2: Configurazione di un veicolo spaziale per l'esplorazione marziana propulso a vela solare e stabilizzato a spin, proposto da Philippe Villers al Massachusetts Institute of Technology nel 1960.

1.2.3 La svolta: il rendez-vous con la cometa di Halley

La vera svolta nello studio di un sistema propulsivo basato sulla pressione di radiazione solare si ebbe quando Jerome Wright scoprì nella metà degli anni '70 l'opportunità di effettuare un *rendez-vous* con la cometa di Halley utilizzando una vela solare. In seguito a questa scoperta il JPL creò un gruppo di studio permanente che aveva lo scopo di studiare la fattibilità di una tale ardita missione. A differenza di quanto era successo in precedenza, il progetto di *rendez-vous* con la cometa di Halley rappresentò la prima vera e propria analisi sistematica di una missione spaziale con una vela solare e ciò fu possibile grazie essenzialmente a due grandi fattori:

1. lo sviluppo in quegli anni del sistema Space Shuttle Transportation System, che prometteva la possibilità di trasportare notevoli volumi di carico in orbita terrestre bassa
2. i grandi passi in avanti nella tecnologia di costruzione e spiegamento di grandi strutture nello spazio

I primi risultati estremamente incoraggianti ottenuti dal gruppo di studio tra il 1976 e l'inizio del 1977 catturarono l'attenzione dell'allora nuovo direttore Dr. Bruce Murray

del Jet Propulsion Laboratory, il quale diede nuovo slancio al progetto di realizzare una missione di *rendez-vous* con la cometa di Halley, come inizialmente pianificato. I tempi per il progetto tuttavia si fecero sempre di più stretti poiché per effettuare un lancio nel tardo 1981 era necessario iniziare la costruzione prima del 1978. Grazie all'apporto decisivo della NASA alla fine del 1977 il gruppo di lavoro al JPL iniziò una fase di studio dettagliato della missione con l'aiuto di una mezza dozzina di industrie contraenti e con la supervisione del centro di ricerca Ames e Langley della NASA. Lo studio dimostrò subito come la soluzione legata alla vela solare fosse estremamente interessante e flessibile rispetto alle altre opportunità proposte.

Nonostante l'entusiasmo del gruppo di lavoro e la fiducia riposta nella possibilità di utilizzo di un veicolo spaziale propulso attraverso la pressione di radiazione solare in un *rendez-vous* con la cometa, i vertici della NASA furono alquanto cauti e pessimisti. Affermando che non sarebbe stato possibile completare lo studio e lanciare il veicolo spaziale per il 1981 verso la cometa di Halley, la NASA giudicò la tecnologia legata alla vela solare non ancora sufficientemente matura per essere utilizzata in una missione spaziale a breve termine. A favore del gruppo di lavoro al JPL vi fu la vittoria della tecnologia a vela solare su di una proposta basata sull'utilizzo di un motore elettrico a ioni ma, nonostante questo, il progetto di *rendez-vous* verso la cometa fu abbandonato definitivamente. A quel punto la NASA revocò il suo supporto (ed i suoi finanziamenti) al progetto riguardante le vele solari, anche se alcuni piccoli programmi di ricerca ancora sussistono come parte del progetto *In-Space Propulsion Technologies Project*^[8].

1.3 Lo stato attuale della ricerca

L'idea legata alla vela solare era sopravvissuta all'abbandono del progetto ed anzi aveva suscitato una nuova attenzione a livello internazionale come ad esempio in Francia, dove un gruppo di ricercatori iniziarono il progetto di una *voile solaire*. Negli Stati Uniti un gruppo di ingegneri, provenienti in gran parte dal JPL, fondarono un'organizzazione privata parzialmente finanziata da fondi pubblici avente lo scopo principale di portare avanti lo studio e lo sviluppo della tecnologia basata sulle vele solari. Questo gruppo, chiamato World Space Foundation, è riuscito anche a costruire un prototipo di vela a scopo dimostrativo.

Nonostante il fatto che ancora ad oggi nessuna vela solare sia stata realmente impiegata come sistema propulsivo primario in una missione spaziale, vi sono degli elementi che lasciano ben sperare per un futuro prossimo. Il Japanese Institute of Space and Astronautical Science ha recentemente (Agosto 2004) spiegato con successo un prototipo di vela solare in orbita terrestre bassa. Un progetto privato della Planetary Society e dei Cosmos Studios prevede lo spiegamento di una vela solare nella missione Cosmos 1. Il veicolo spaziale è attualmente in costruzione nel centro russo di Babakin e lo scopo della missione

è quello di controllare una vela solare in volo al fine di dimostrare la fattibilità di questo tipo di propulsione. Secondo quanto pianificato la vela inizierà la sua missione in orbita circolare con quota di circa 800 km che sarà gradualmente incrementata. In Europa l'ESA

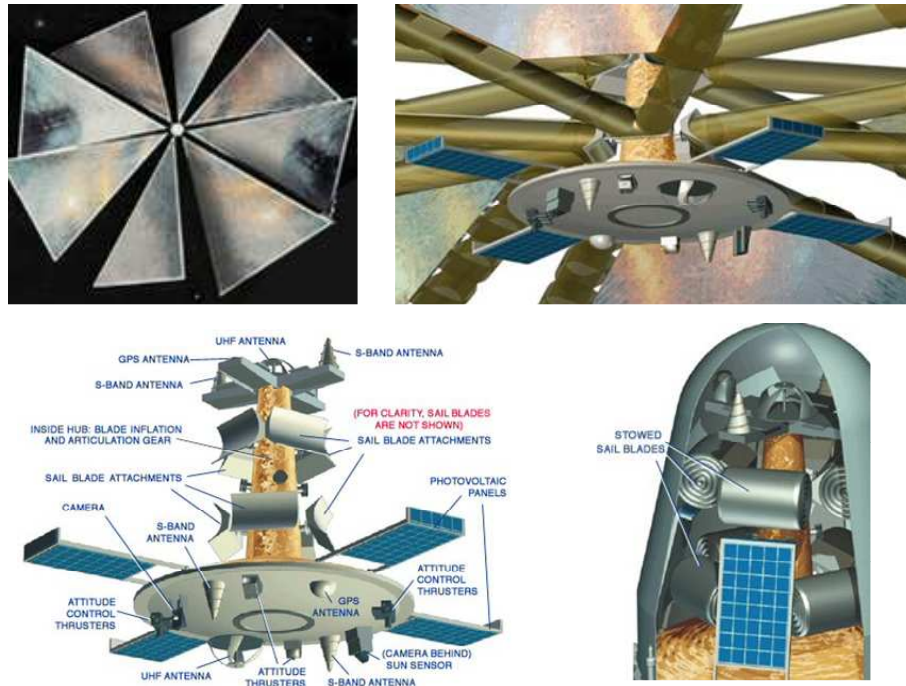


Figura 1.3: Configurazione di lancio ed in volo della vela Cosmos 1 della società privata Planetary Society attualmente in fase avanzata di sviluppo nel centro russo di Babakin. La Cosmos 1 sarà la prima vela solare al mondo ad essere utilizzata come sistema di propulsione primario in una missione spaziale.

e il DLR hanno un progetto comune che ha come scopo quello di testare in orbita una vela solare (cfr. Figura 1.4) nel giro di pochi anni^[2;9;10]. Nella Figura 1.5 è stato riportato il programma della NASA e del NOAA/USAF per i prossimi quindici anni riguardante l'utilizzo di una vela solare come sistema propulsivo primario in una missione spaziale. Come si osserva dai dati riguardanti le caratteristiche delle vele solari che si pensa di impiegare nelle missioni proposte, si spera di raggiungere delle densità caratteristiche della vela (cioè del rapporto tra la massa della vela e l'area della sua superficie riflettente) dell'ordine di 3–7 g/m² addirittura nel 2012-2017. Infatti è proprio legata alla tecnologia di produzione del materiale riflettente la possibilità di realizzare in tempi accettabili una vela solare da utilizzare in una missione verso lo spazio profondo. Nella Figura 1.6 è riportato il valore caratteristico della densità della vela e della superficie riflettente per un certo numero di vele studiate fino ad oggi.

Alcune stime effettuate di recente da Dachwald e Seboldt^[11] prevedono che la possibilità di costruire una vela solare avente accelerazione caratteristica pari a 0.4 mm/s² (cfr. §2.8) diventi concreta non prima del 2014 e che sia possibile raddoppiare l'accelerazione



Figura 1.4: Prova di svolgimento di una vela solare quadrata delle dimensioni di 20 m × 20 m condotta nel dicembre del 1999 a Colonia nell'istituto dell'ESA CTC da parte del German Aerospace Center (DLR).

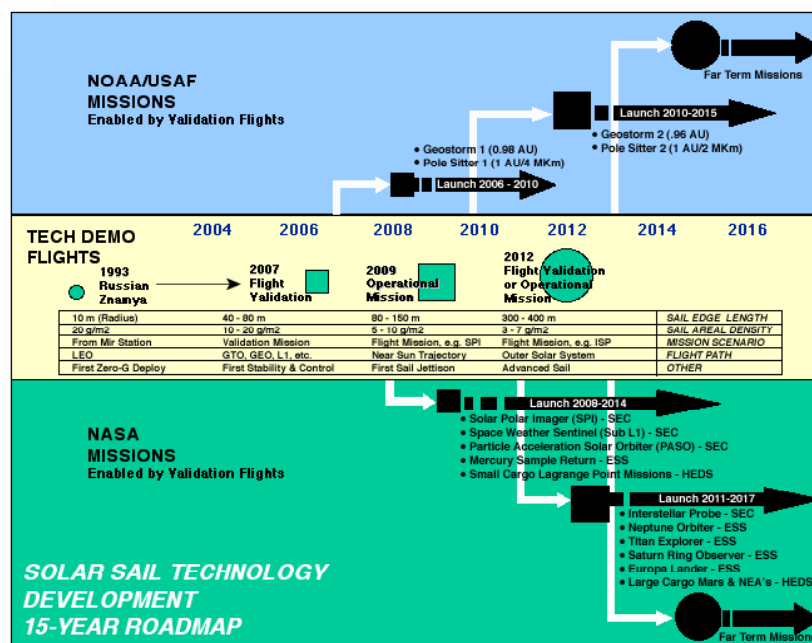


Figura 1.5: Programma della NASA e del NOAA/USAF per i prossimi quindici anni riguardante l'utilizzo di una vela solare come sistema propulsivo primario in una missione spaziale.

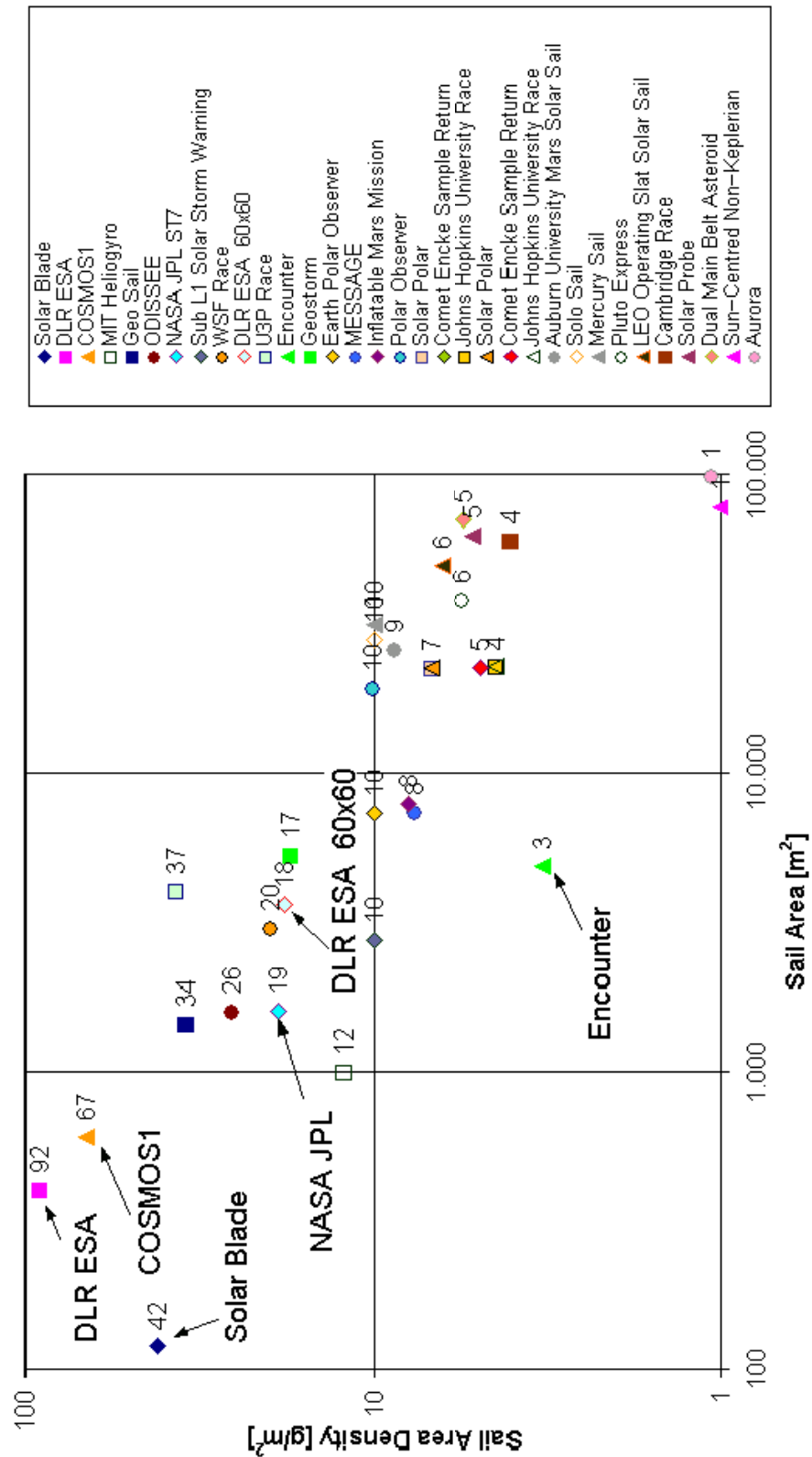


Figura 1.6: Densità e superficie della vela per alcuni prototipi in fase di studio.

caratteristica all'incirca ogni dieci anni fino ad un valore minore di 3 mm/s^2 . Fino ad allora le missioni più interessanti da realizzare con una vela solare, come ad esempio lo studio diretto dell'eliopausa e la fuga dal sistema solare, rimarranno sostanzialmente precluse. Nonostante questo la tecnologia che presumibilmente sarà disponibile nei prossimi anni renderà possibili tutta una serie di interessanti missioni spaziali, prime fra tutte quelle che hanno come scopo primario lo studio dei piccoli corpi del sistema solare come asteroidi e comete di corto periodo^[11].

2

Modello della Spinta Generata dalla Vela Solare

2.1 Introduzione

In questo Capitolo verranno esposti i modelli matematici attraverso i quali è possibile schematizzare la forza (e quindi l'accelerazione) esercitata sulla vela solare a causa della pressione di radiazione solare. I principi fisici che sono alla base di questi modelli sono ben noti dai tempi di Maxwell e riportati più volte nella letteratura tecnica (si veda a tal proposito il riferimento [12] pag. 32–55). Per questo motivo in questa Tesi si è scelto di accennare solo brevemente alla fisica della pressione di radiazione da un punto di vista elettromagnetico e di illustrare invece più approfonditamente quale sia il legame tra la spinta e gli angoli caratteristici della vela.

I modelli della forza verranno specializzati per due classi di vela: convenzionale e composta. Quest'ultima è nota in letteratura anche con il nome di *Solar Photon Thruster* (SPT), introdotto da Robert Forward^[13] nel 1991. Per quel che riguarda la classe SPT verrà sviluppato un nuovo modello di forza ottico, che si aggiunge a quello ideale già presente in letteratura. Questo modello tiene conto del comportamento non ideale della superficie riflettente e permette inoltre di legare le caratteristiche geometrico-ottiche della vela alle sue prestazioni in termini di accelerazione propulsiva sviluppata.

2.2 Pressione di radiazione solare

Un'onda o radiazione elettromagnetica è costituita da campi magnetici ed elettrici che oscillano perpendicolarmente l'uno rispetto a l'altro ed entrambi rispetto alla direzione di propagazione dell'onda. La radiazione elettromagnetica si propaga nel vuoto alla velocità della luce $c \triangleq 299\,792\,458$ m/s ed esercita una pressione su ogni superficie esposta ad essa

pari a:

$$P = \frac{\Phi_E}{c} \quad (2.1)$$

dove Φ_E è il flusso di energia (ovvero l'energia per unità di area e per unità di tempo) associato alla radiazione elettromagnetica. Nel caso in cui si consideri come sorgente di radiazione di Sole (simbolo astronomico \odot), il flusso di energia ad una distanza r dalla stella può essere espresso in funzione della luminosità solare^[14] $L_\odot \triangleq 3.846 \times 10^{26}$ W come:

$$P = \frac{L_\odot}{4\pi c r^2} \quad (2.2)$$

Alternativamente si può esprimere la pressione di radiazione solare in funzione di r e del valore della pressione solare P_\oplus misurata alla distanza $r_\oplus = 1$ AU della Terra dal Sole. Poiché l'orbita eliocentrica della Terra non è perfettamente circolare, il valore della pressione di radiazione varia ovviamente durante un'anno terrestre con un'escursione di circa il 6% rispetto ad un valore medio comunemente accettato di $P_\oplus \triangleq 4.5632 \times 10^{-6}$ Pa. L'espressione della pressione di radiazione solare, disegnata nella Figura 2.1, diventa allora:

$$P = P_\oplus \left(\frac{r_\oplus}{r} \right)^2 \quad (2.3)$$

2.3 Parametro di snellezza della vela

Un parametro molto importante nel calcolo delle prestazioni di una vela solare è la *snellezza della vela* β . Il parametro di snellezza della vela è definito come il rapporto tra l'accelerazione dovuta alla pressione di radiazione solare di una superficie A perfettamente riflettente posta perpendicolarmente alla direzione di propagazione dei raggi solari ad una distanza r dal Sole e l'accelerazione gravitazionale esercitata dal Sole:

$$\beta \triangleq \frac{2PA/m}{\mu_\odot/r^2} \quad (2.4)$$

dove $\mu_\odot = 132712442007 \times 10^9$ m³/s² indica il parametro gravitazionale solare mentre m la massa del corpo riflettente.

2.4 Sistemi di riferimento

È indispensabile introdurre i sistemi di riferimento attraverso i quali vengono espresse le componenti della posizione, della velocità e dell'accelerazione della vela solare.

Si definisce a tale scopo un sistema di riferimento orbitale $\mathcal{T}_{orb}(x_{orb}, y_{orb}, z_{orb})$ di vettori $\hat{\mathbf{i}}_{orb}$, $\hat{\mathbf{j}}_{orb}$, $\hat{\mathbf{k}}_{orb}$ ed avente origine nel centro di massa della vela. Si indica inoltre con

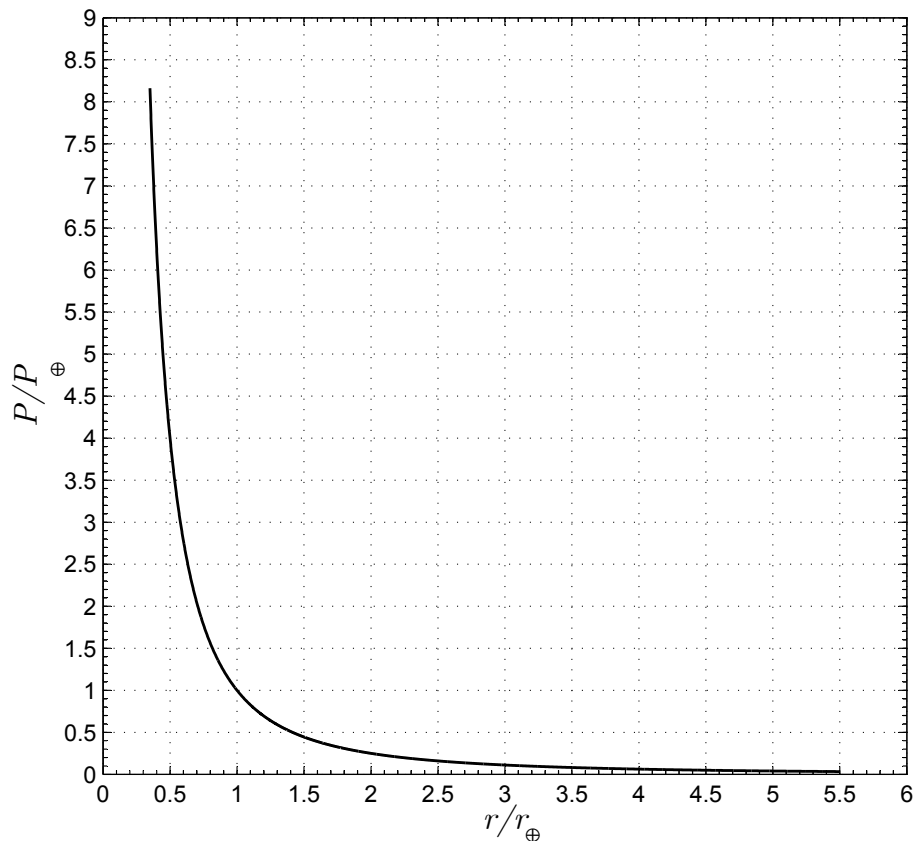


Figura 2.1: Variazione della pressione di radiazione solare con la distanza r dal Sole.

$\mathcal{T}_{\odot}(x,y,z)$ un sistema di riferimento inerziale eliocentrico-eclittico e con \mathbf{r} il vettore posizione del centro di massa della vela in questa terna. Il versore $\hat{\mathbf{i}}_{orb}$ coincide con il versore $\hat{\mathbf{r}} \triangleq \mathbf{r}/r$, mentre il versore $\hat{\mathbf{j}}_{orb}$ è scelto in maniera tale che il piano $z_{orb} = 0$ contenga l'asse z del sistema di riferimento \mathcal{T}_{\odot} con y_{orb} diretto verso il polo eclittico (si veda la Figura 2.2).

2.5 Vela convenzionale

In questo paragrafo viene illustrato il modello matematico della spinta sulla vela solare generata dall'interazione della pressione di radiazione solare con la superficie riflettente di cui è dotata la vela in questione.

In questa Tesi si è scelto di indicare con il termine “convenzionale” quella classe di vele che solitamente in letteratura viene indicata con il termine “piana” (*flat*). Questa scelta è legata al desiderio di evitare confusione nella trattazione del modello di forza parametrico dove, come verrà meglio spiegato in seguito, si tiene conto della reale curvatura della vela causata dalla pressione di radiazione. In quel caso infatti il termine “piano” perde il suo significato geometrico e serve solo per indicare appunto la classe di vele che, in assenza di

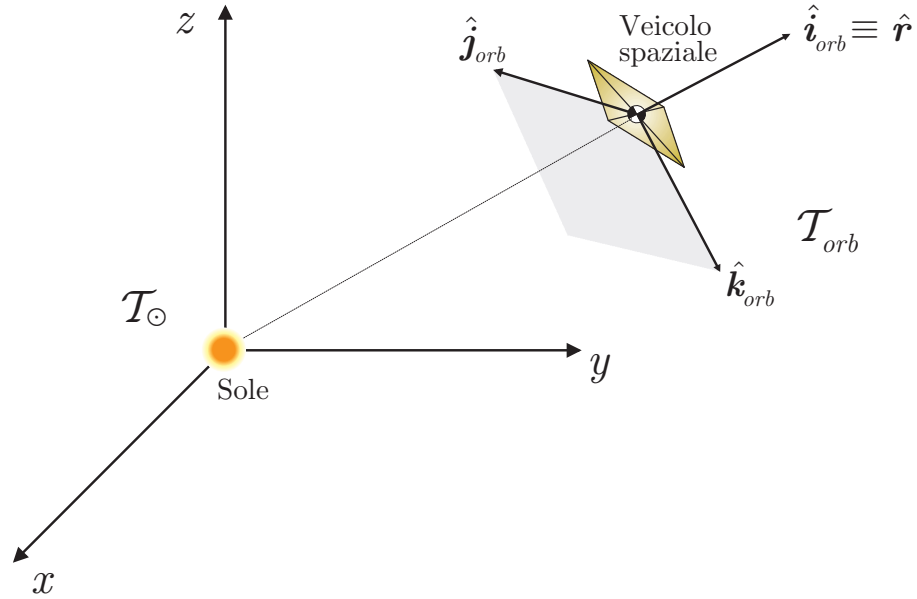


Figura 2.2: Sistemi di riferimento.

pressione di radiazione, è approssimabile ad un corpo perfettamente piano. L'ipotesi di corpo rigido e piano viene invece mantenuta nei modelli di forza ideale ed ottico di seguito illustrati.

2.5.1 Modello di forza ideale

Si supponga di avere a disposizione una superficie perfettamente riflettente (ovvero una semplice schematizzazione di una vela solare) di area A e di massa m posta ad una distanza r dal Sole. Supponendo la distanza r sufficientemente grande da poter considerare come puntiforme questa sorgente luminosa, si indichi con $\hat{\mathbf{n}}$ il versore normale alla vela nella direzione dei raggi incidenti. Come si osserva nella Figura 2.3, le componenti del versore $\hat{\mathbf{n}}$ nel sistema \mathcal{T}_{orb} sono univocamente definite attraverso i due angoli α e δ caratteristici della vela. In particolare si ha:

- $\alpha \in [0, \pi/2]$ detto *angolo di cono* è l'angolo formato dalla direzione dei raggi solari incidenti sulla vela (direzione $\hat{\mathbf{r}}$) con la normale $\hat{\mathbf{n}}$ al piano contenente la vela (cfr. Figura 2.4) ed è dato dalla relazione

$$\alpha \triangleq \arccos(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \quad (2.5)$$

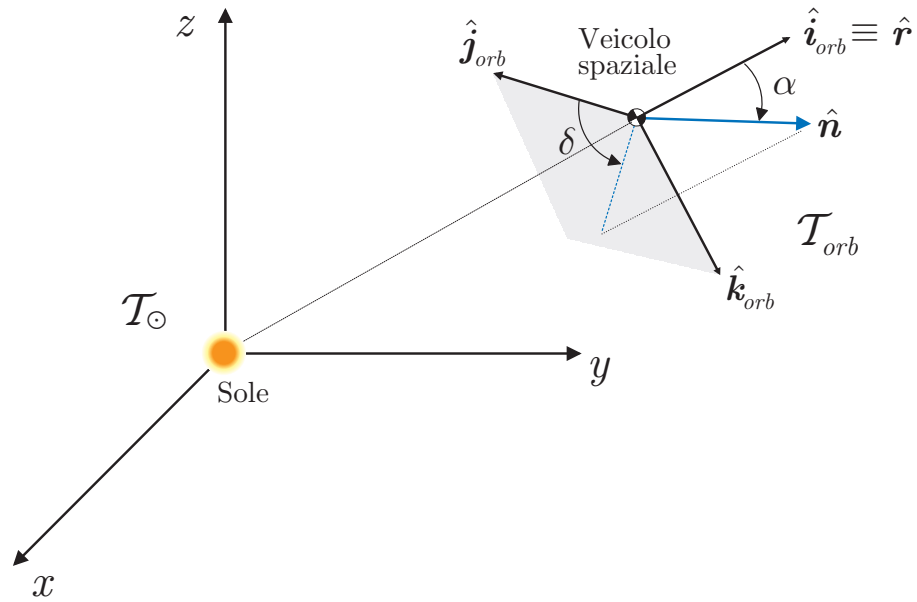


Figura 2.3: Angoli caratteristici della vela.

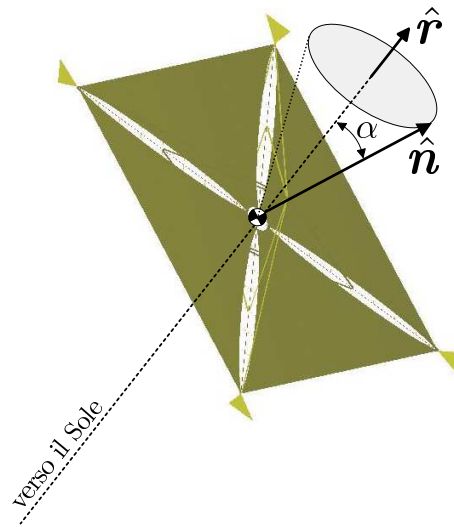


Figura 2.4: Visualizzazione dell'angolo di cono α .

- $\delta \in [-\pi, \pi]$ detto *angolo di azimuth* è l'angolo formato dalla proiezione del versore normale alla vela nel piano $x_{orb} = 0$ con l'asse y_{orb} . Indicando con $[\hat{\mathbf{n}}]_{\mathcal{T}_{orb}} = [n_x, n_y, n_z]^T$ le componenti del versore normale alla vela nel sistema di riferimento orbitale si ottiene:

$$\delta \triangleq \arctan(n_z/n_y) \quad (2.6)$$

Ricordando che la vela è perfettamente riflettente e che quindi la riflessione dei raggi luminosi sulla sua superficie è speculare, si può dimostrare che l'accelerazione \mathbf{a}_i a cui è soggetta ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \frac{2PA}{m} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{2PA}{m} \cos^2 \alpha \hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{\beta \mu_\odot}{r^2} \cos^2 \alpha \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove per l'ultimo passaggio si è fatto uso della (2.4). Dall'equazione (2.7) si osserva che il modulo dell'accelerazione normalizzata della vela

$$\frac{a_i}{\beta \mu_\odot / r^2} = \cos^2 \alpha \quad (2.8)$$

nel modello ideale varia con il quadrato del coseno dell'angolo di controllo α , come riportato nella Figura 2.5. Questo comportamento può essere spiegato fisicamente tenendo in

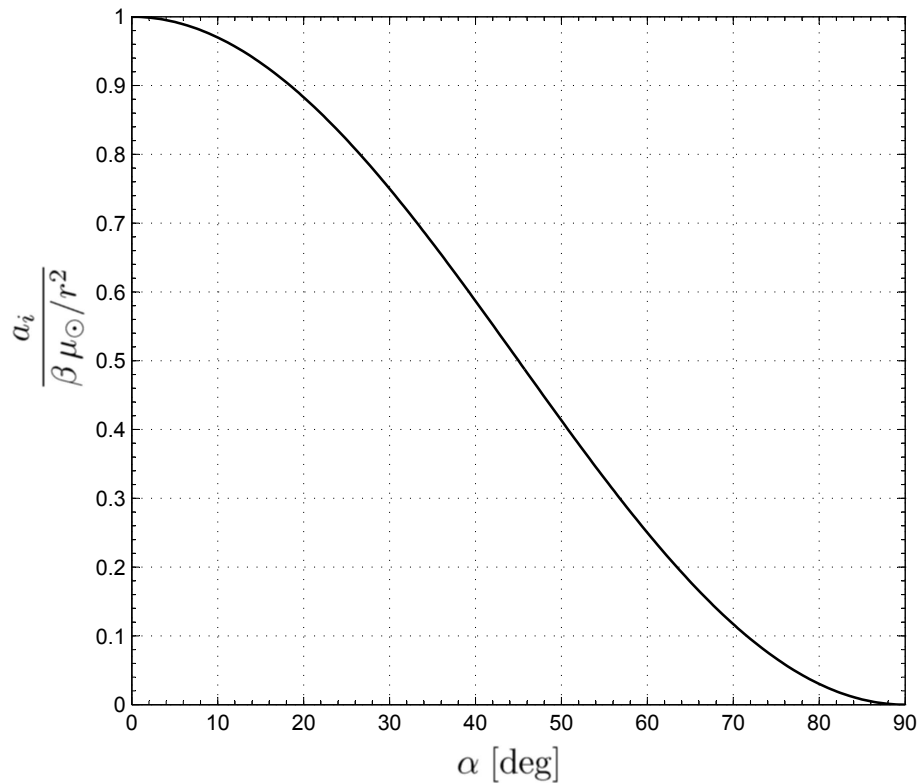


Figura 2.5: Accelerazione normalizzata della vela in funzione dell'angolo di controllo α nel caso di vela convenzionale e modello ideale.

considerazione che:

1. la quantità di fotoni collezionati dalla vela dipende dall'area proiettata da quest'ultima su un piano perpendicolare alla direzione dei raggi incidenti e, come è facile verificare dalla Figura 2.6, l'area proiettata varia appunto con il coseno dell'angolo α ;

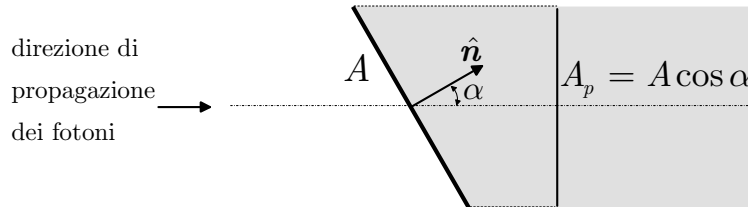


Figura 2.6: Area proiettata dalla vela convenzionale.

2. nel modello ideale i fotoni vengono riflessi in maniera perfettamente speculare (si veda la Figura 2.7) e la direzione della spinta esercitata sulla vela è diretta perpendicolarmente a quest'ultima, vale a dire lungo la direzione del vettore \hat{n} . La spinta impressa alla vela in modulo varia anch'essa con il coseno dell'angolo di controllo α .

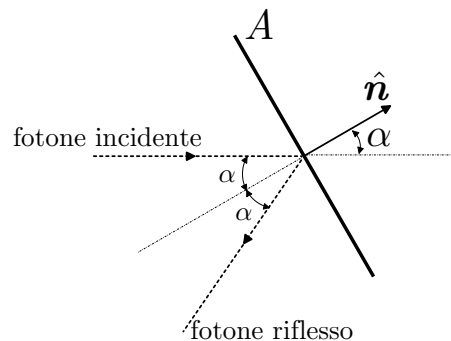


Figura 2.7: Riflessione speculare nella vela convenzionale, modello ideale.

2.5.2 Modello di forza ottico

Se si considera un corpo reale e non perfettamente riflettente (coefficiente di riflessione $\rho < 1$), può essere ottenuto un modello più accurato della spinta, e quindi dell'accelerazione, prodotta dalla vela. Si supponga a tal proposito di indicare con s la frazione di fotoni specularmente riflessi dalla vela, con B_{fr} e B_b i coefficienti di non-Lambertianità rispettivamente della superficie esposta direttamente ai raggi solari (superficie illuminata) e di quella opposta (superficie in ombra), con ϵ_{fr} e ϵ_b i coefficienti di emissività della superficie illuminata e di quella in ombra.

Si può dimostrare che l'accelerazione della vela causata dalla pressione di radiazione solare ha la seguente espressione^[12]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_o &= \frac{P A}{m} \left[b_1 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + \left(b_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + b_3 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right) \hat{\mathbf{n}} \right] \\
 &= \frac{P A}{m} \left[b_1 \cos \alpha \hat{\mathbf{r}} + (b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha) \hat{\mathbf{n}} \right] \\
 &= \frac{\beta \mu_\odot}{2 r^2} \left[b_1 \cos \alpha \hat{\mathbf{r}} + (b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha) \hat{\mathbf{n}} \right]
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

dove si è posto per brevità

$$b_1 \triangleq 1 - \rho s \tag{2.10}$$

$$b_2 \triangleq 2 \rho s \tag{2.11}$$

$$b_3 \triangleq B_{fr} \rho (1 - s) + (1 - \rho) \frac{\epsilon_{fr} B_{fr} - \epsilon_b B_b}{\epsilon_{fr} + \epsilon_b} \tag{2.12}$$

I coefficienti b_1 , b_2 e b_3 sono chiamati *coefficienti di forza* e dipendono esclusivamente dalle caratteristiche del materiale di cui è costituita la superficie riflettente della vela.

Nel caso in cui venga utilizzata come superficie riflettente una lamina di alluminio sovrapposta ad uno strato di supporto di kapton si ottengono i coefficienti di forza riportati nella Tabella 2.1 (da Rif. [12]). Nella Tabella 2.1 sono stati anche riportati i coefficienti di

	Ideale	Al-Kapton
ρ	1	0.88
s	1	0.94
ϵ_{fr}	0	0.05
ϵ_b	0	0.55
B_b	2/3	0.79
B_{fr}	2/3	0.55
b_1	0	0.1728
b_2	2	1.6544
b_3	0	-0.0109

Tabella 2.1: Coefficienti di forza per una vela ideale e per una vela reale avente uno strato di alluminio-Kapton come superficie riflettente.

forza per una vela perfettamente riflettente. Utilizzando questi coefficienti si osserva che l'equazione dell'accelerazione \mathbf{a}_i nel caso ideale (2.7) può essere interpretata come un caso particolare dell'equazione (2.9).

Come già fatto per il modello di forza ideale, è interessante studiare la variazione del modulo a_o dell'accelerazione della vela al variare dell'angolo di cono α . Ricordando che

$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \alpha$ si ottiene:

$$a_o^2 = \mathbf{a}_o \cdot \mathbf{a}_o = \left(\frac{\beta \mu_\odot}{2r^2} \right)^2 \left[(b_1 \cos \alpha)^2 + (b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha)^2 + 2b_1 \cos^2 \alpha (b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha) \right] \quad (2.13)$$

da cui si ottiene il modulo dell'accelerazione normalizzata il cui grafico è riportato nella Figura 2.8:

$$\begin{aligned} \frac{a_o}{\beta \mu_\odot / r^2} &= \frac{\sqrt{(b_1 \cos \alpha)^2 + (b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha)^2 + 2b_1 \cos^2 \alpha (b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha)}}{2} \\ &= \frac{\cos \alpha (b_1 \cos \alpha + b_2 \cos \alpha + b_3)}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Come si osserva dalla Figura 2.8, a parità di β , il modulo dell'accelerazione di una

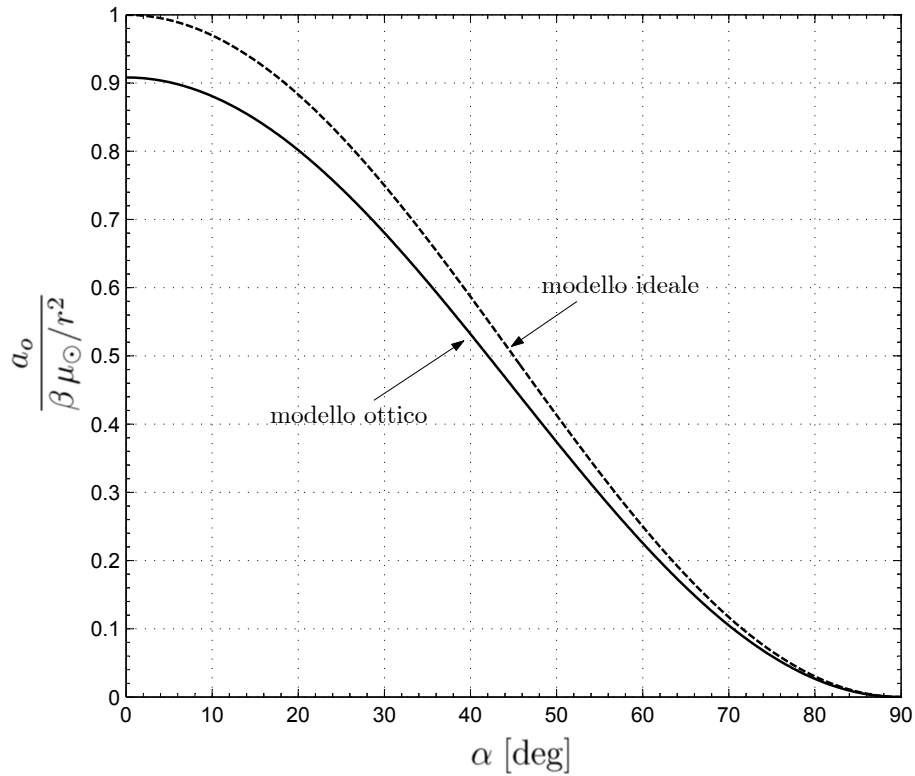


Figura 2.8: Accelerazione normalizzata della vela in funzione dell'angolo di controllo α nel caso di vela convenzionale e modello ottico (strato di alluminio-Kapton).

vela ideale (vale a dire perfettamente riflettente) è sempre maggiore di una vela in cui venga tenuto in considerazione il reale comportamento ottico del materiale riflettente. In particolare la differenza massima tra le due accelerazioni si raggiunge in corrispondenza dell'angolo di cono $\alpha = 0$ (piano della vela perpendicolare alla direzione dei raggi incidenti) mentre in entrambi i casi l'accelerazione si annulla quando $\alpha = \pi/2$ (piano della vela

parallelo alla direzione dei raggi incidenti).

Come si osserva facilmente dalle equazioni (2.8) e (2.14) la differenza massima del modulo dell'accelerazione è pari a:

$$\max \left(\frac{a_i}{\beta \mu_{\odot}/r^2} - \frac{a_o}{\beta \mu_{\odot}/r^2} \right) = 1 - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{2} = \frac{2 - (b_1 + b_2 + b_3)}{2} \quad (2.15)$$

Considerando uno strato riflettente costituito da alluminio e Kapton (si veda la Tabella 2.1) si ricava una differenza massima nel modulo dell'accelerazione normalizzata della vela tra modello ideale ed ottico pari a 0.0918.

2.5.3 Modello di forza parametrico

Il modello di forza chiamato comunemente “parametrico” fu ricavato al JPL nella metà degli anni '70 durante lo studio di fattibilità di una missione di *rendez-vous* verso la cometa di Halley^[15;16;17]. Questo modello di forza è esatto nel senso che tiene conto della reale curvatura della vela causata dalla pressione di radiazione solare ed è stato ottenuto attraverso un'integrazione numerica utilizzando una discretizzazione della vela.

L'accelerazione \mathbf{a}_p è parametrizzata in funzione dell'angolo di cono della spinta $\theta_p \in [0, \theta_p^*]$ compreso tra la direzione dei raggi incidenti $\hat{\mathbf{r}}$ e la direzione della spinta generata dalla vela $\hat{\mathbf{a}}_p$ (si veda la Figura 2.9), cioè:

$$\theta_p \triangleq \arccos(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_p) \quad (2.16)$$

L'espressione dell'accelerazione è la seguente (cfr. [12] pagg. 51–53)

$$\mathbf{a}_p = a_{p_0} [\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \cos(2\theta_p) + \mathbf{c}_3 \cos(4\theta_p)] \hat{\mathbf{a}}_p \quad (2.17)$$

dove \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 e \mathbf{c}_3 sono i coefficienti di forza legati allo studio della reale curvatura della superficie riflettente mentre a_{p_0} è il modulo dell'accelerazione della vela quando i versori $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{a}}_p$ coincidono. Da un punto di vista pratico, e tenendo presente che di solito la curvatura è di piccola entità, a_{p_0} può essere vista come il modulo dell'accelerazione della vela quando il suo piano medio è posto perpendicolarmente alla direzione dei raggi solari. I coefficienti di forza, derivati da [12], sono stati riportati nella Tabella 2.2 e si riferiscono a due modelli di vela studiati dal JPL: JPL *Square Sail* (JSS) ed *Heliogyro*. Il modulo dell'accelerazione normalizzata a_p/a_{p_0} è stato disegnato in funzione di θ_p nella Figura 2.10.

Osservando che $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 = 1$ e tenendo in considerazione l'equazione (2.9) si ottiene la seguente espressione per quel che riguarda a_{p_0} :

$$a_{p_0} = \frac{\beta (b_1 + b_2 + b_3)}{2} \frac{\mu_{\odot}}{r^2} \quad (2.18)$$

Utilizzando delle semplici relazioni trigonometriche e compattando i coefficienti empirici

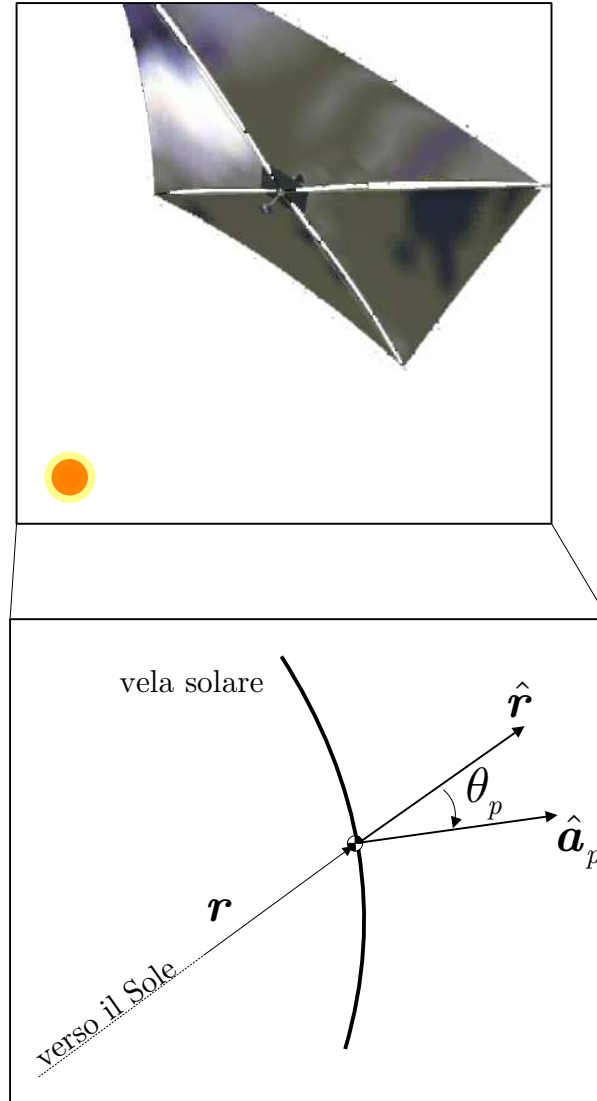


Figura 2.9: Angoli caratteristici della vela nel modello di forza parametrico.

si ricava infine un'espressione di \mathbf{a}_p dipendente esclusivamente dal coseno dell'angolo di controllo θ_p :

$$\mathbf{a}_p = \frac{\beta}{2} \frac{\mu_\odot}{r^2} (c_1 + c_2 \cos^4 \theta_p + c_3 \cos^2 \theta_p) \hat{\mathbf{a}}_p \quad \text{con } \theta_p \in [0, \theta_p^*] \quad (2.19)$$

dove c_1 , c_2 e c_3 sono dei coefficienti di forza legati a \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 e \mathbf{c}_3 e b_1 , b_2 e b_3 . Anche questi coefficienti sono stati riportati nella Tabella 2.2 e si riferiscono, per quel che riguarda il materiale riflettente, al doppio-strato costituito da alluminio e Kapton, le cui caratteristiche ottiche sono state riassunte in §2.5.2. Nel seguito l'espressione dell'accelerazione \mathbf{a}_p che verrà utilizzata sarà quella data dall'equazione (2.19).

L'angolo θ_p^* indica il valore di θ_p che annulla la spinta generata dalla vela e, in base

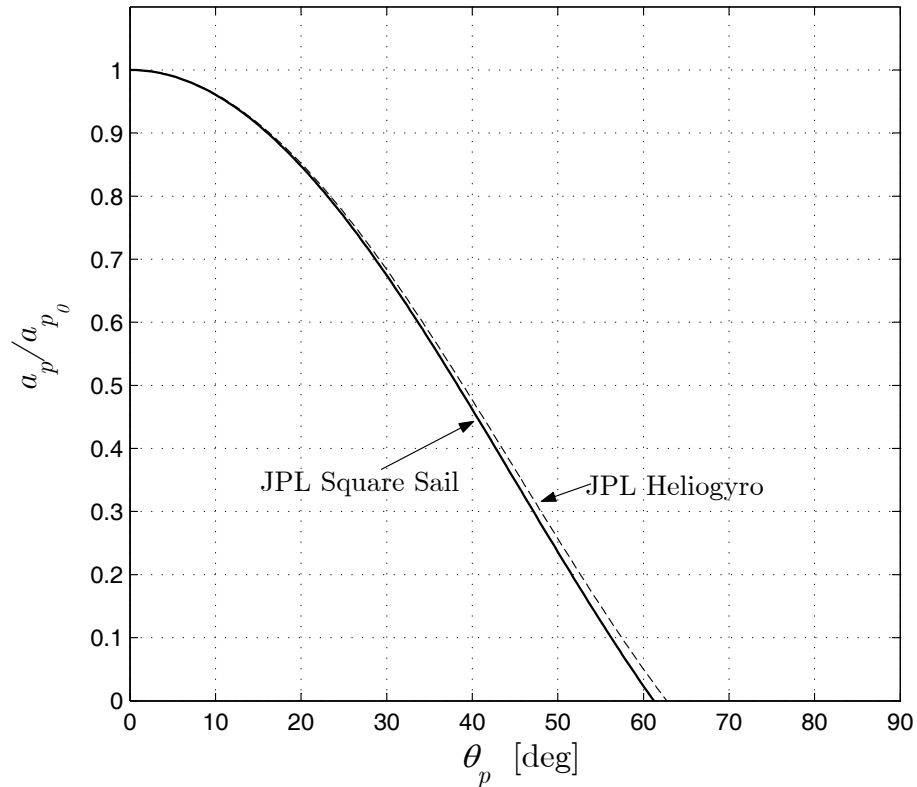


Figura 2.10: Accelerazione normalizzata della vela nel modello di forza parametrico per JPL *Square Sail* e *Heliogyro*.

all'equazione (2.19), ha l'espressione seguente:

$$\theta_p^* = \arccos \left(\sqrt{\frac{-c_3 + \sqrt{c_3^2 - 4c_1c_2}}{2c_2}} \right) \quad (2.20)$$

Come si osserva dalla Figura 2.10, il valore di θ_p^* per le vele JPL *Square Sail* e *Heliogyro* è dell'ordine di 62° .

2.6 Vela composta o SPT

La vela composta, chiamata anche *Solar Photon Thruster* (SPT) da Robert Forward^[13], è una vela nella quale la funzione di raccogliere la radiazione elettromagnetica solare è separata dalla funzione di riflettere (e quindi infine di dirigere) i fotoni. Storicamente una vela solare avente queste caratteristiche fu studiata negli anni '70 nell'allora Unione Sovietica anche se il progetto fu presto abbandonato, ma fu solamente all'inizio negli anni '90 che Forward rispolverò l'idea della vela composta studiandone il comportamento e le prestazioni nell'ipotesi di superfici perfettamente riflettenti.

	<i>Square Sail</i>	<i>Heliogyro</i>
c_1	0.349	0.367
c_2	0.662	0.643
c_3	-0.011	-0.010
c_1	-0.5885	-0.5195
c_2	-0.1598	-1.1453
c_3	2.5646	2.4811

Tabella 2.2: Coefficienti di forza per una vela reale (JPL *Square Sail* e *Heliogyro*) avente un modello di forza parametrico e materiale riflettente costituito da un doppio strato di alluminio-Kapton.

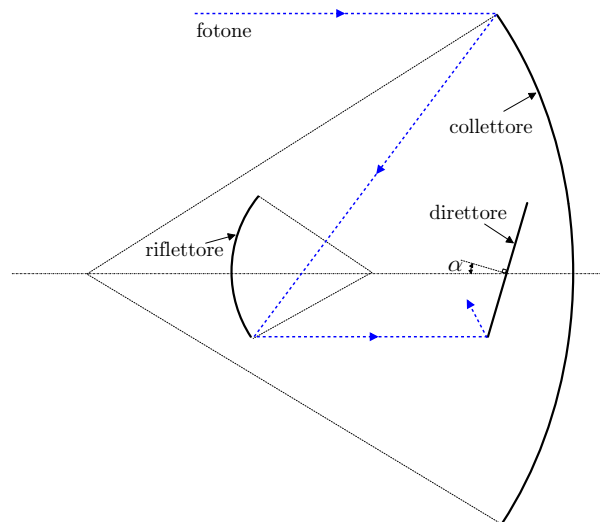


Figura 2.11: Schema semplificato della vela composta o SPT (non in scala).

2.6.1 Componenti della vela

La vela SPT può essere idealmente suddivisa in tre componenti fondamentali (si veda la Figura 2.11): il collettore, il riflettore ed il direttore che verranno di seguito illustrati nel dettaglio.

collettore È costituito da una superficie riflettente avente la forma di una zona sferica o paraboloidale e ha il compito di raccogliere i fotoni incidenti sulla vela. Tipicamente le sue dimensioni variano, per quel che riguarda il diametro, dalle centinaia di metri fino addirittura a qualche chilometro (cfr. [12] pag. 35). La faccia interna, che viene tenuta costantemente rivolta verso il Sole, è rivestita da un materiale altamente riflettente mentre la faccia esterna, quella sempre in ombra, ha la sola funzione di dissipare calore. Solitamente per distanze dal Sole non troppo piccole, i raggi

incidenti possono considerarsi approssimativamente paralleli all'asse del collettore al fine di raccogliere quanti più fotoni possibile. Questi fotoni, raggiunta la superficie interna del collettore, vengono riflessi e convogliati verso il fuoco ottico F . Nel caso in cui la superficie riflettente abbia la forma di un settore sferico con centro O_c , la geometria del collettore è definita da tre parametri: il raggio della calotta R_c ed i due angoli ξ_0 e ξ_1 che individuano il limite esterno ed interno del settore sferico, come si osserva nella Figura 2.12.

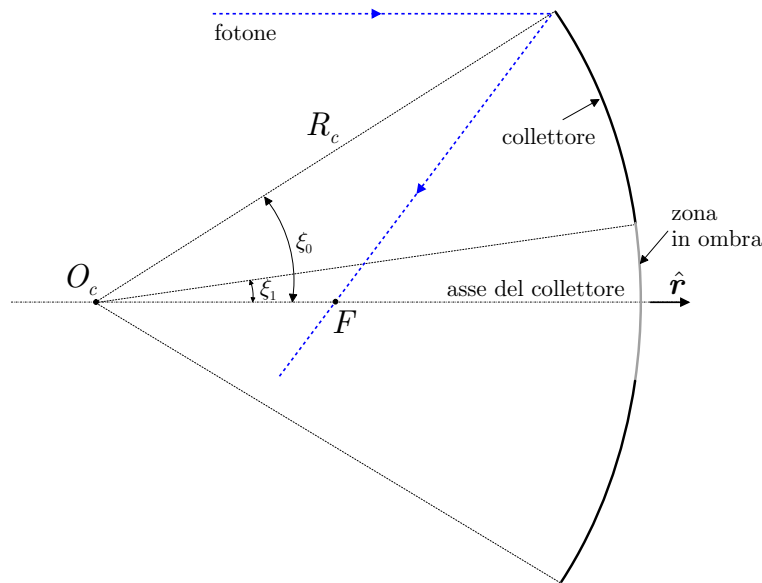


Figura 2.12: Schema semplificato del collettore nella vela SPT (non in scala).

riflettore È costituito anch'esso da una superficie riflettente di forma sferica o paraboloidale e ha il compito di trasmettere i fotoni raccolti dal collettore allo specchio direttore. L'asse del riflettore coincide con quello del collettore come anche il suo angolo di apertura ed il suo fuoco ottico in maniera tale da raccogliere tutta la radiazione elettromagnetica riflessa da quest'ultimo. La geometria del riflettore è definita dal raggio R_r e dalla posizione del centro della calotta O_r il quale è posto ad una distanza che varia nell'intorno di $R_r/2$ dal fuoco F in modo che i raggi riflessi vengano convogliati verso lo specchio.

Se il riflettore viene posto tra il fuoco F ed il collettore, la superficie esterna della calotta viene rivestita di materiale altamente riflettente mentre quella interna ha la funzione di dissipare il calore. Se invece il riflettore è posto tra il centro geometrico del collettore O_c ed il fuoco F , la superficie interna della calotta sferica viene ricoperta di materiale riflettente mentre quella esterna ha una funzione dissipativa (si veda la Figura 2.13). A differenza del collettore il quale è un settore sferico, il riflettore ha la forma di una calotta sferica in quanto il riflettore con la sua superficie

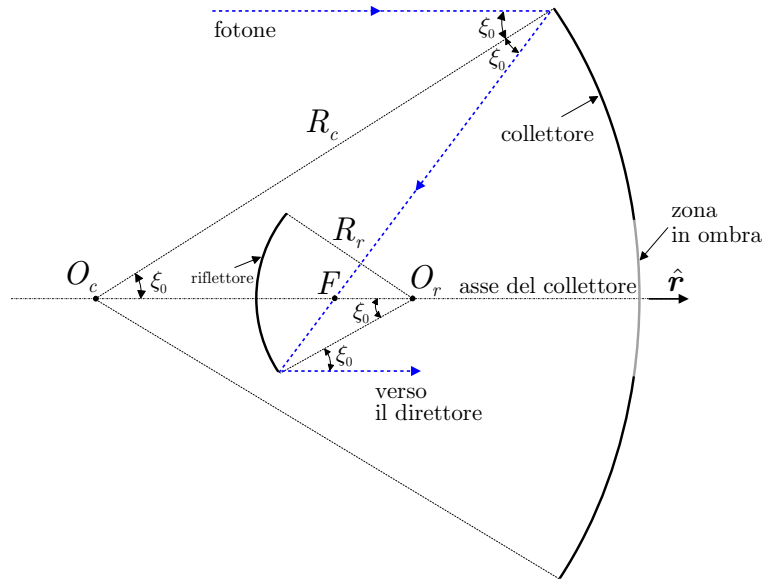


Figura 2.13: Schema semplificato del riflettore nella vela SPT con una riflessione speculare dei raggi solari (non in scala).

dissipativa manda in ombra una parte del collettore, come schematicamente indicato nella Figura 2.14.

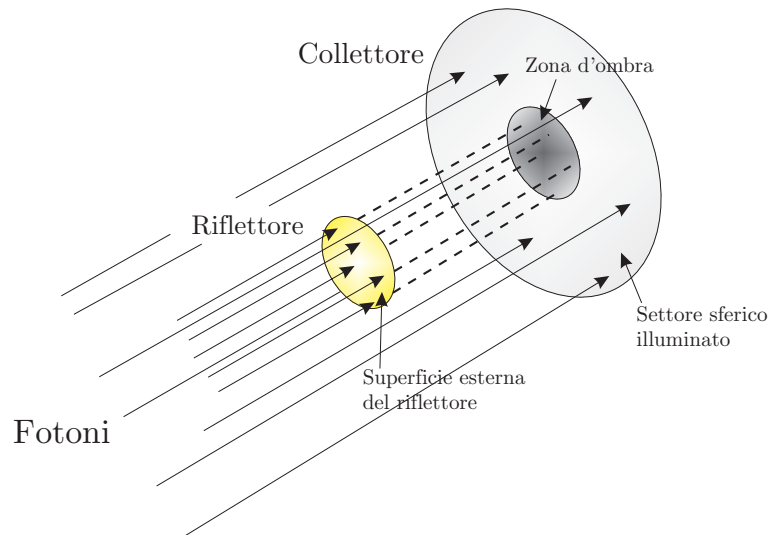


Figura 2.14: Zona d'ombra del collettore dovuta alla presenza del riflettore (non in scala).

direttore È costituito da una piccola (rispetto al collettore) superficie riflettente sostanzialmente piana e ha il compito di riflettere verso lo spazio i fotoni raccolti dal collettore e rediretti dal riflettore, permettendo in questo modo di controllare la spinta generata dalla vela. La superficie investita dalla radiazione solare è ricoperta

da materiale metallico altamente riflettente mentre la superficie posteriore svolge il compito, come nei casi precedenti, di dissipare calore.

Il centro dello specchio è posto sull'asse del collettore il più vicino possibile a quest'ultimo evitando comunque i problemi legati all'interferenza geometrica tra queste due superfici. La scelta di tale posizione è dettata dal fatto che così facendo si riduce l'intervallo dell'angolo di controllo α della vela entro il quale i raggi riflessi dallo specchio tornano ad incontrare il riflettore e non vengono riflessi nello spazio esterno.

Inoltre la vela è provvista di un opportuna struttura di collegamento per la movimentazione delle parti mobili e per l'ancoraggio del carico pagante. Nel seguito i parametri geometrici ed ottici riferiti al collettore, riflettore e direttore saranno rispettivamente indicati con i pedici c , r e d .

2.6.2 Parametri di progetto

I parametri geometrici di progetto scelti sono stati R_c , $\xi_0 \in [0, \pi/2]$ e χ . Intendendo con il termine di *bagnate* le superfici riflettenti investite dalle radiazioni solari, il parametro χ (detto fattore di concentrazione) è definito come il rapporto tra la superfici bagnate del collettore A_c e del riflettore A_r :

$$\chi \triangleq \frac{A_c}{A_r} = \frac{R_c^2}{R_r^2} \quad (2.21)$$

Dall'equazione precedente si ottiene in questo modo l'espressione del raggio di curvatura del riflettore (si veda la Figura 2.15):

$$R_r = \frac{R_c}{\sqrt{\chi}} \quad (2.22)$$

mentre dalla Figura 2.13, l'angolo $\xi_1 < \xi_0$ è dato dall'espressione (si veda la Figura 2.16)

$$\xi_1 = \arcsin\left(\frac{R_r \sin \xi_0}{R_c}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin \xi_0}{\sqrt{\chi}}\right) \quad (2.23)$$

Tenendo presente la geometria del collettore, avente la forma di un settore sferico, la superficie bagnata A_c ha la seguente espressione in funzione degli angoli ξ_0 , ξ_1 e del raggio R_c :

$$A_c = 2 \pi R_c^2 (\cos \xi_1 - \cos \xi_0) \quad (2.24)$$

mentre per quel che riguarda la superficie bagnata del riflettore si ha (cfr. Eq. (2.21)):

$$A_r = 2 \pi R_r^2 (\cos \xi_1 - \cos \xi_0) \quad (2.25)$$

Risulta utile calcolare anche le superfici riflettenti del collettore e del riflettore proiettate su di un piano perpendicolare all'asse del collettore. Indicando queste con il pedice p si

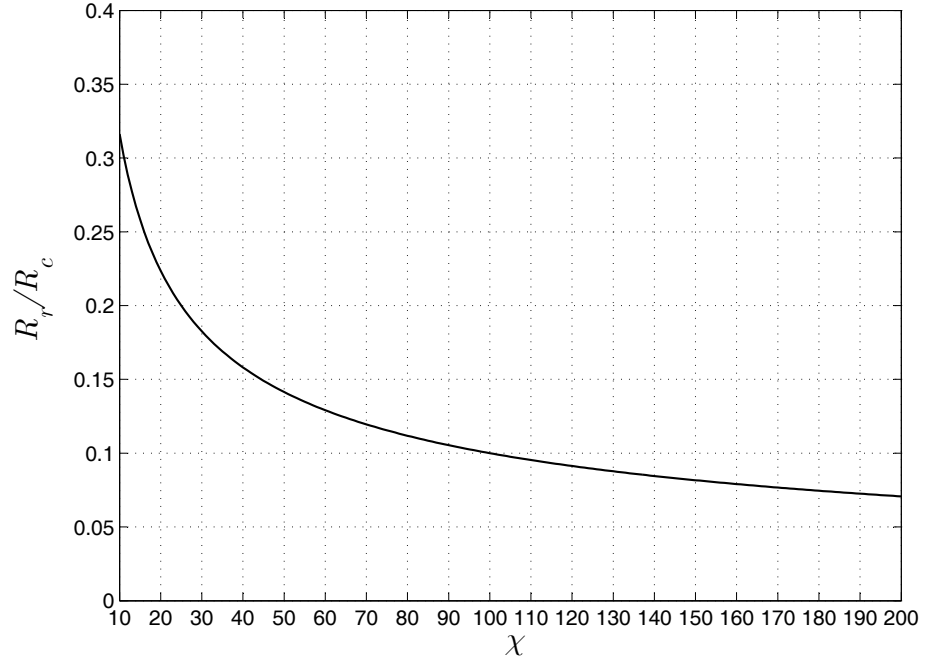


Figura 2.15: Rapporto tra i raggi del riflettore R_r e del collettore R_c in funzione del rapporto di concentrazione χ .

ha:

$$A_{c_p} = \pi R_c^2 (\cos^2 \xi_1 - \cos^2 \xi_0) \quad (2.26)$$

$$= \pi R_c^2 \sin^2 \xi_0 (\chi - 1) / \chi$$

$$A_{r_p} = \pi R_r^2 (\cos^2 \xi_1 - \cos^2 \xi_0) \quad (2.27)$$

Si osservi a che, in base alle (2.24)-(2.25) ed alle (2.26)-(2.27) si ottiene:

$$\frac{A_c}{A_{c_p}} = \frac{A_r}{A_{r_p}} = \frac{2}{\cos \xi_1 + \cos \xi_0} \quad (2.28)$$

vale a dire il rapporto tra l'area bagnata e l'area bagnata proiettata (sia del collettore che del riflettore) non dipende dal raggio del componente ma esclusivamente dagli angoli caratteristici ξ_0 e ξ_1 della geometria della vela composta. Come si vede inoltre dalla Figura 2.17, sostituendo la (2.23) nella (2.28) e disegnando i risultati, il rapporto A_c/A_{c_p} risulta sostanzialmente indipendente dal valore del fattore di concentrazione χ quando questo è maggiore di 50, ma dipende solo dall'angolo ξ_0 .

Risulta interessante stimare l'ingombro totale della vela composta in funzione dei parametri di progetto. Facendo riferimento alla Figura 2.18 si calcolano la lunghezza totale della vela L ed il suo diametro massimo D attraverso le seguenti relazioni, riportate anche

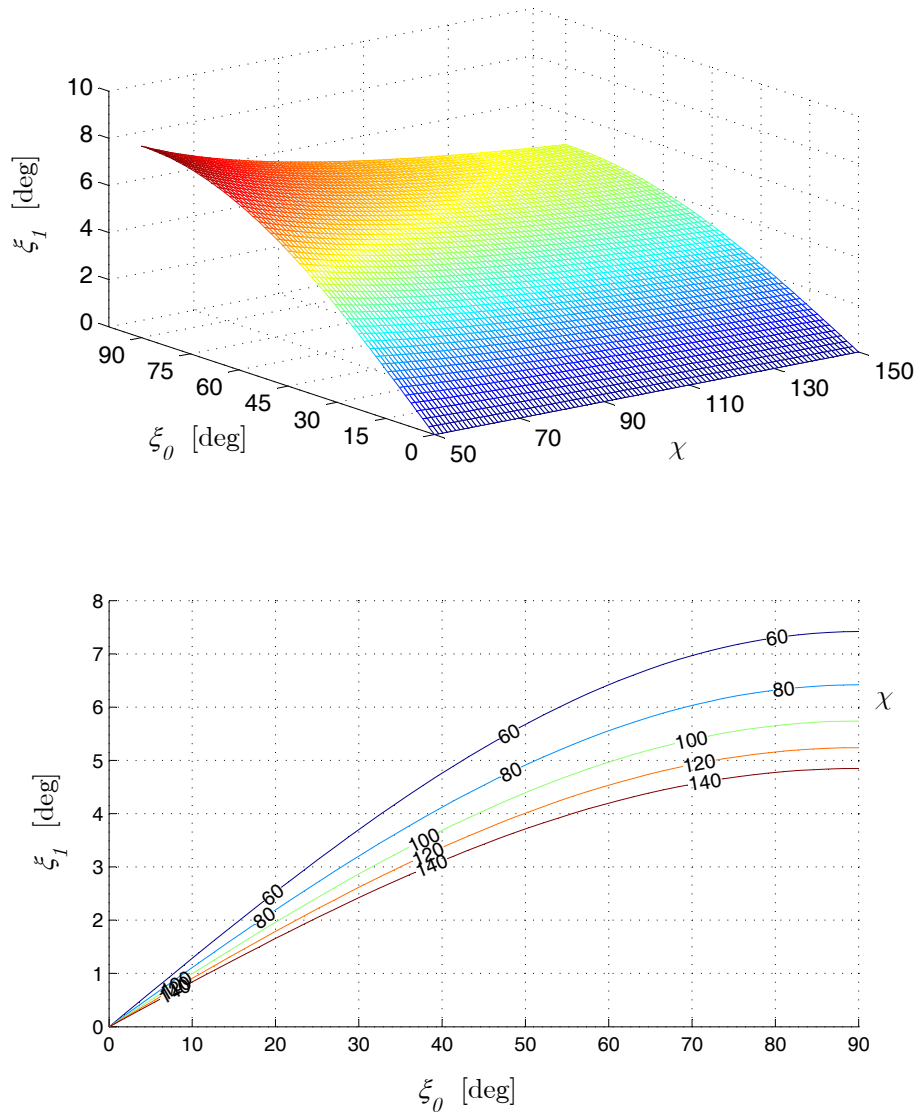


Figura 2.16: Angolo ξ_1 del collettore in funzione dell'angolo ξ_0 e del fattore di concentrazione χ .

nella Figura 2.19:

$$L = \frac{R_c + R_r}{2} = R_c \left(\frac{\sqrt{\chi} + 1}{2\sqrt{\chi}} \right) \quad (2.29)$$

$$D = 2 R_c \sin \xi_0 \quad (2.30)$$

Utilizzando i parametri L e D è possibile esprimere l'area proiettata del collettore A_{c_p} nella forma seguente (si veda la Figura 2.20)

$$A_{c_p} = \pi D^2 \frac{(R_c/L) - 1}{(R_c/L)^2} \quad (2.31)$$

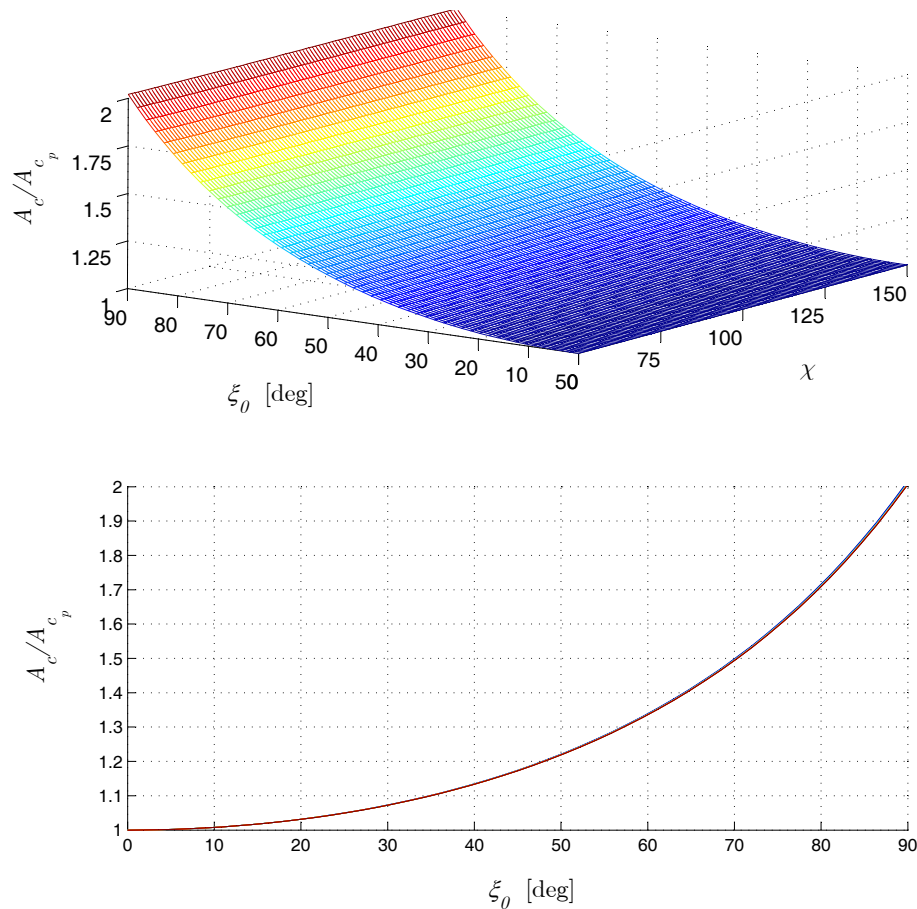


Figura 2.17: Rapporto A_c/A_{c_p} in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore e del fattore di concentrazione χ .

2.6.3 Ipotesi semplificative e scelte di progetto

Vengono di seguito descritte alcune ipotesi semplificative adottate per l'analisi delle prestazioni della vela composta. Innanzitutto, come già accennato precedentemente, si suppone che l'asse del collettore sia perfettamente allineato con la direzione dei raggi solari \hat{r} e si ipotizza che tutti i raggi riflessi specularmente dal riflettore arrivino al direttore.

Si considera trascurabile l'effetto della radiazione solare che incide direttamente sulla superficie esterna del riflettore, quella cioè rivestita da un materiale dissipativo. Tale superficie possiede tipicamente un coefficiente di riflessione ρ abbastanza basso, dell'ordine di 0.09. Quindi la spinta generata su questa superficie dalla pressione di radiazione solare è molto più piccola di quella agente sul collettore tenendo anche conto della differenza tra le due superfici esposte.

Viene anche trascurato l'effetto dei raggi che non vengono riflessi specularmente dai componenti della vela e che vanno ad investire involontariamente altre parti del SPT.

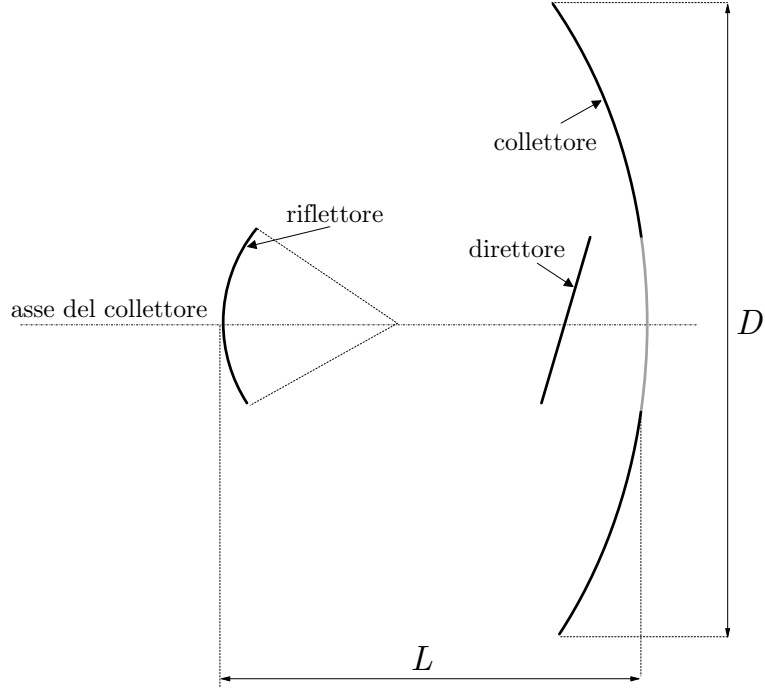


Figura 2.18: Ingombro totale della vela composta.

Infatti questi in generale sono una percentuale molto ridotta quando si considerano i materiali comunemente usati per le vele solari^[12].

Si suppone inoltre che il direttore possa raccogliere, per ogni valore dell'angolo di controllo α , tutto il fascio di fotoni proveniente dal riflettore. È bene sottolineare che quest'ultima è un'ipotesi molto forte in quanto, come si osserva dalla Figura 2.11, esiste la seguente relazione tra la superficie reale del direttore A_d e la sua superficie proiettata A_{d_p} su di un piano perpendicolare all'asse del collettore:

$$A_{d_p} = A_d \cos \alpha \quad (2.32)$$

Nell'equazione precedente è stato introdotto l'angolo di cono del direttore α , definito come l'angolo formato dal versore normale al direttore stesso $\hat{\mathbf{n}}_d$ con la direzione di propagazione dei raggi solari $\hat{\mathbf{r}}$ la quale coincide con l'asse del collettore (si veda la Figura 2.21):

$$\cos \alpha \triangleq \hat{\mathbf{n}}_d \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (2.33)$$

Imponendo che tutti i raggi riflessi dal riflettore incidano sul direttore ($A_{d_p} = A_{r_p}$) si ottiene anche, dalle equazioni (2.22), e (2.27) e dalla Figura 2.13, la seguente relazione:

$$A_{d_p} = A_{r_p} = \pi R_r^2 (\cos^2 \xi_1 - \cos^2 \xi_0) = \frac{\pi R_c^2 (\cos^2 \xi_1 - \cos^2 \xi_0)}{\chi} \quad (2.34)$$

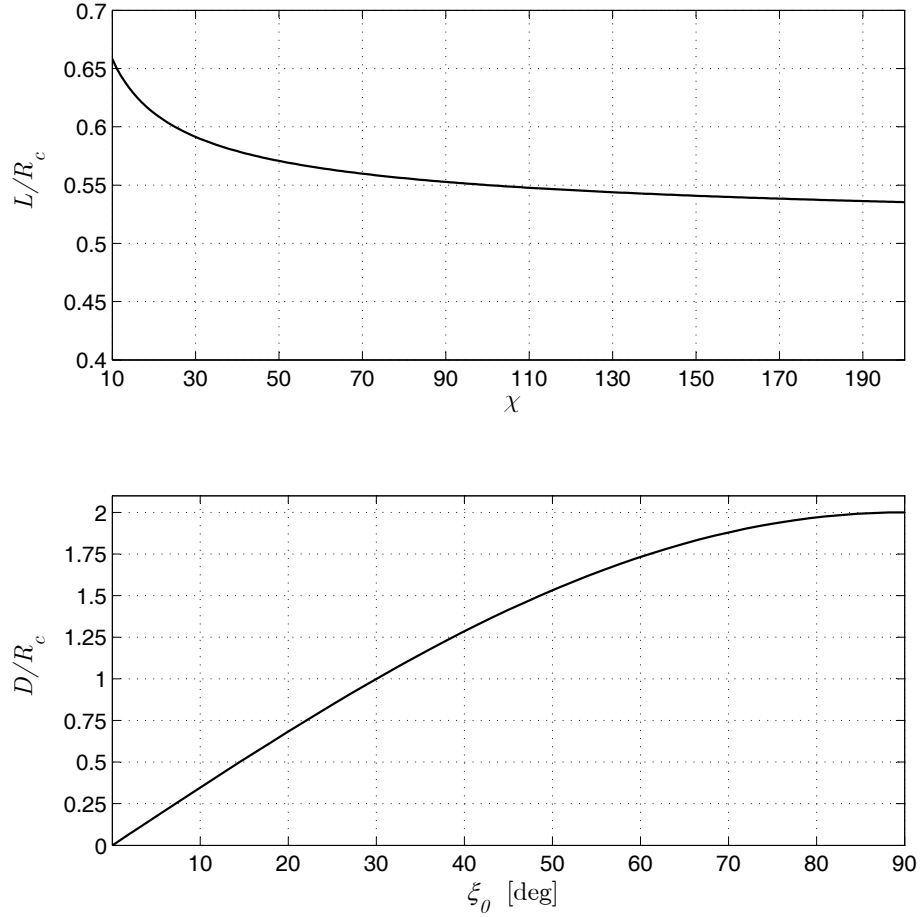


Figura 2.19: Lunghezza e diametro massimi della vela composta in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore e del fattore di concentrazione χ .

Dalle equazioni (2.32) e (2.34) si ricava infine l'espressione della superficie A_d richiesta al direttore per soddisfare l'ipotesi di completo utilizzo dei fotoni in uscita dal riflettore:

$$A_d = \frac{\pi R_c^2 (\cos^2 \xi_1 - \cos^2 \xi_0)}{\chi \cos \alpha} \quad (2.35)$$

Come si osserva dall'equazione precedente, all'aumentare dell'angolo di controllo α la superficie "utile" del direttore, ovvero la superficie che contribuisce alla redirectione dei fotoni riflessi dal riflettore, diminuisce in maniera inversamente proporzionale al coseno dell'angolo di cono del direttore, impedendo in questo modo di utilizzare tutti i fotoni riflessi dal riflettore.

Una possibile soluzione a questo non trascurabile problema sarebbe quella di traslare la posizione del riflettore lungo l'asse del collettore al fine di riflettere i raggi non più parallelamente all'asse, ma di farli convergere verso una zona piú ristretta del direttore. In questa maniera si riuscirebbero a sfruttare tutti i fotoni riflessi dal riflettore fino a valori dell'angolo di controllo α prossimi al suo limite superiore di 90° , quando cioè il

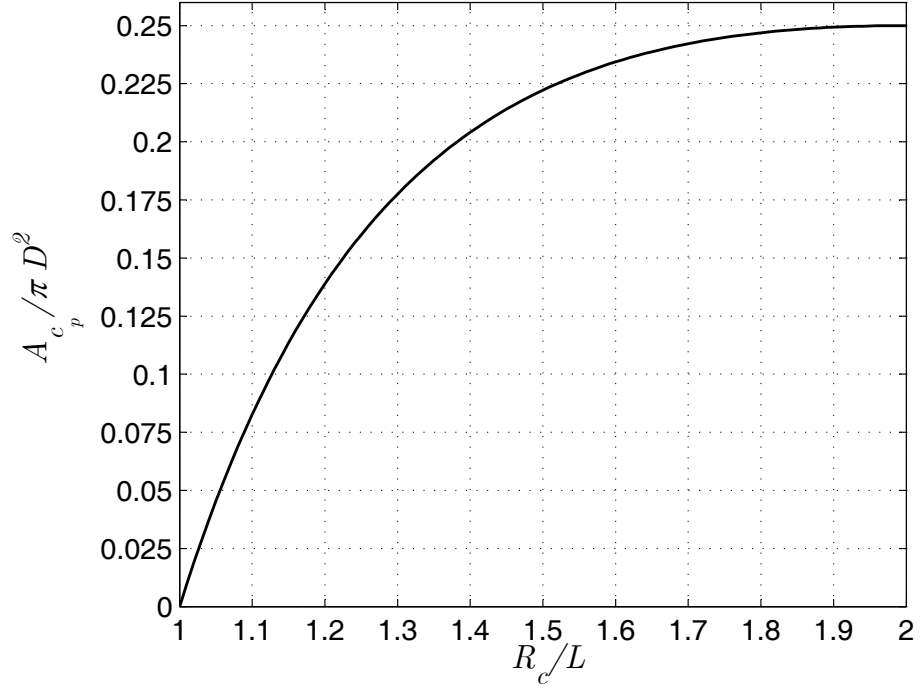


Figura 2.20: Superficie proiettata del collettore (adimensionalizzata) in funzione del rapporto R_c/L .

direttore è sostanzialmente disposto parallelamente all'asse del collettore. Questa soluzione ha come problema principale che la superficie dello specchio direttore colpita dai raggi diminuisce all'aumentare dell'angolo α , procurando così un innalzamento non trascurabile della temperatura di funzionamento della superficie riflettente. Sono tuttavia in via di sviluppo dei nuovi materiali che resistono ad alte temperature, dell'ordine di 2000 K, in microfibre di carbonio rivestite di metalli riflettenti aventi un'alta temperatura di fusione, da utilizzare per missioni dove si prevede un passaggio ravvicinato al Sole. Con questi nuovi tipi di materiale il problema dell'alta temperatura del direttore sarebbe risolto. In ogni caso questa soluzione porta a prevedere un opportuno sistema di movimentazione e controllo dello specchio riflettore che si aggiunge, per quel che riguarda la massa, ai rimanenti sottosistemi di cui la vela composta è costituita.

Per questi motivi (interferenza e diminuzione dell'area proiettata) l'intervallo di variazione ammissibile dell'angolo di controllo α è più piccolo rispetto al teorico intervallo $[0 - \pi/2]$. In maniera semplificativa questi effetti indesiderati verranno trascurati e si supporrà nel calcolo delle prestazioni della vela composta che $\alpha \in [0, \pi/2]$.

In ultima analisi le ipotesi semplificative precedenti comportano che:

$$A_d \cos \alpha = \frac{\pi R_c^2 (\cos^2 \xi_1 - \cos^2 \xi_0)}{\chi} = \text{costante} \quad \forall \alpha \in [0, \pi/2] \quad (2.36)$$

Nelle simulazioni numeriche delle traiettorie seguite da una vela composta con modello di forza ottico si utilizzerà un angolo ξ_0 piccolo, dell'ordine di 15° , al fine di ridurre il costo di realizzazione della curvatura del collettore e del riflettore. La curvatura desiderata dei due componenti può così esser ottenuta in maniera indiretta sfruttando la pressione di radiazione solare.

Infine, alti valori di χ comportano un eccessivo riscaldamento (con conseguente perdita di efficienza) del riflettore e del direttore in quanto una grande quantità di energia raccolta dal collettore viene indirizzata verso delle superfici molto piccole. Al contrario bassi valori di χ comportano una superficie del direttore più grande con una conseguente perdita di manovrabilità di quest'ultimo. Per questi motivi viene assunto per χ un intervallo di variazione compreso tra 50 e 150: quest'intervallo include il valore suggerito da Forward^[13] di 100.

2.6.4 Modello di forza ideale

Considerando le superfici perfettamente riflettenti, è stato dimostrato da Forward^[13] che l'accelerazione \mathbf{a}_i della vela solare composta è data da:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \frac{2 P A_{c_p}}{m} (\hat{\mathbf{n}}_d \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{n}}_d & (2.37) \\ &= \frac{2 P A_{c_p}}{m} \cos \alpha \hat{\mathbf{n}}_d \\ &= \frac{\beta \mu_\odot}{r^2} \cos \alpha \hat{\mathbf{n}}_d \end{aligned}$$

dove $\hat{\mathbf{n}}_d$ è il versore normale allo specchio direttore mentre A_{c_p} è la superficie riflettente del collettore proiettata su di un piano perpendicolare all'asse del collettore stesso. Si osservi che nell'equazione (2.37) il parametro di snellezza della vela è calcolato tenendo in considerazione non la superficie riflettente ma la superficie proiettata A_{c_p} .

Indicando con δ l'angolo di azimut del versore normale allo specchio direttore $\hat{\mathbf{n}}_d$, è possibile determinarne le componenti nel sistema di riferimento orbitale \mathcal{T}_{orb} (si veda la Figura 2.21):

$$[\hat{\mathbf{n}}_d]_{\mathcal{T}_{orb}} = [\cos \alpha, \sin \alpha \cos \delta, \sin \alpha \sin \delta]^T \quad (2.38)$$

Dalla (2.37) si nota subito come, nella vela composta, il modulo dell'accelerazione a_i vari con il coseno dell'angolo di controllo α e non con il suo quadrato, come accadeva invece nel caso di vela convenzionale ideale (cfr. §2.5.1). Dall'analisi della Figura 2.22 si osserva facilmente che il modulo dell'accelerazione nel caso di vela composta è sempre maggiore (o al limite uguale per α pari a 0 e $\pi/2$) a quella di una vela convenzionale di pari superficie con una differenza massima del 25% (in più rispetto ad un modello convenzionale) raggiunta quando $\alpha = \pi/3$.

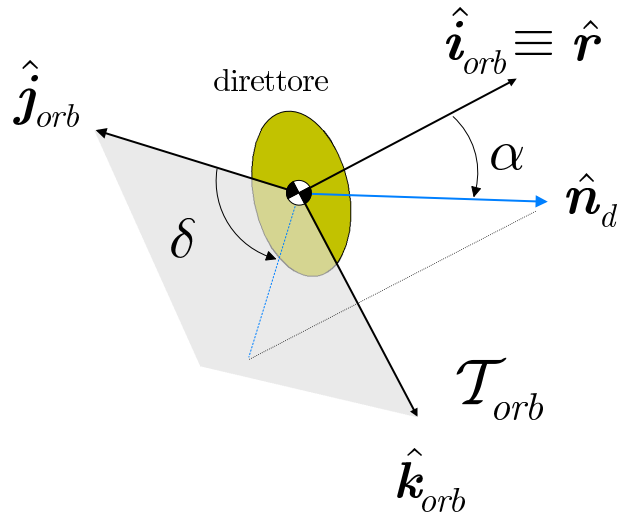


Figura 2.21: Angoli che definiscono l'orientamento del versore normale allo specchio direttore \hat{n}_d in \mathcal{T}_{orb} per una vela composta.

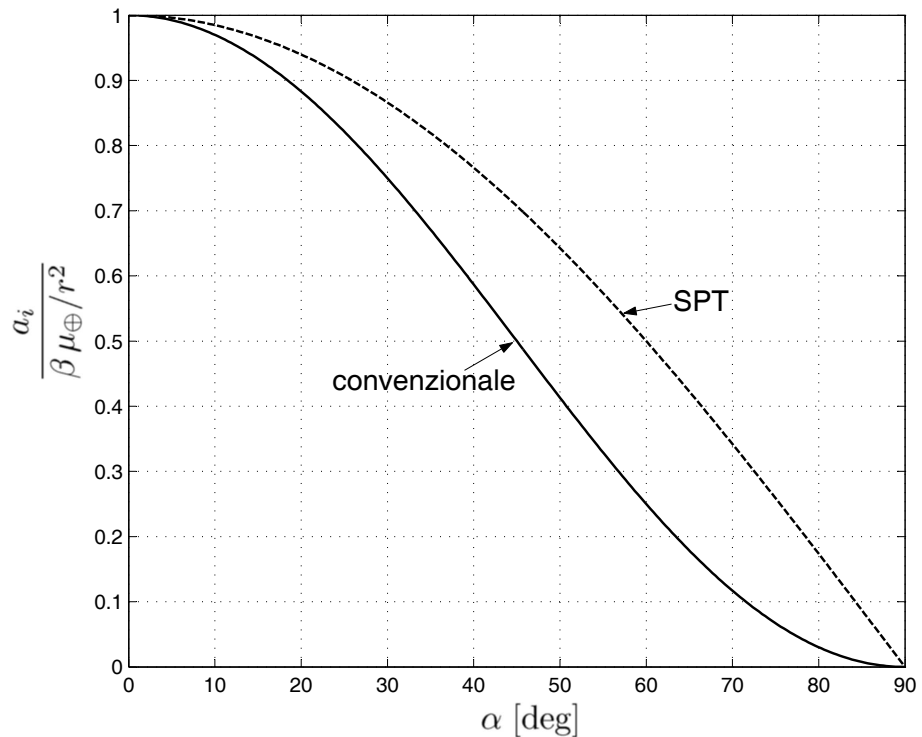


Figura 2.22: Accelerazione normalizzata della vela in funzione dell'angolo di controllo α nel caso di vela composta (SPT) e di vela convenzionale con modello ideale di forza.

2.6.5 Modello di forza ottico

Tenendo presente quanto ricavato nella sezione precedente, riferita ad un modello di forza ideale (vale a dire ad una superficie riflettente in maniera perfettamente speculare), si tiene

conto del comportamento ottico reale della vela composta ricavando un nuovo modello della spinta.

Forza agente sul collettore

Il collettore ed il riflettore vengono discretizzati con una serie di superfici elementari piane come quelle riportate nella Figura 2.23 per poter utilizzare tutti i risultati ottenuti nel §2.5.2 per qual che riguarda una vela convenzionale (piana) con modello di forza ottico.

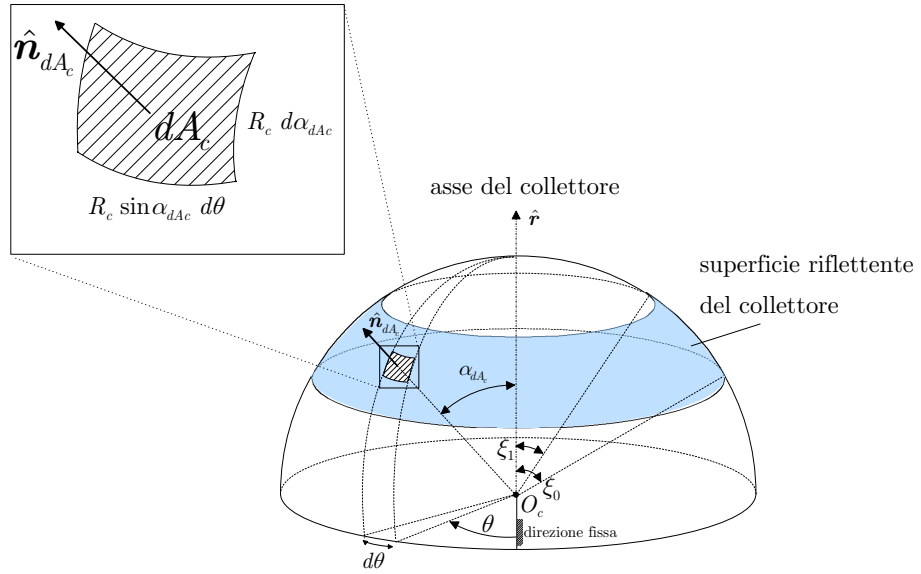


Figura 2.23: Superficie elementare sulla zona riflettente del collettore.

Nella Figura 2.23 la superficie elementare dA_c è pari a

$$dA_c = R_c^2 \sin \alpha_{dA_c} d\theta d\alpha_{dA_c} \quad (2.39)$$

dove α_{dA_c} è l'angolo di cono della superficie elementare mentre $\theta \in [0, 2\pi]$ è l'angolo sul piano perpendicolare all'asse del collettore che individua la posizione di dA_c ed è misurato a partire da una direzione fissa. Indicando con $\hat{\mathbf{n}}_{dA_c}$ la normale alla superficie elementare si osserva che:

$$\hat{\mathbf{n}}_{dA_c} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \cos \alpha_{dA_c} \quad (2.40)$$

In base all'equazione (2.9), la spinta elementare $d\mathbf{F}_c$ (dovuta ai fotoni) che agisce sulla superficie dA_c è data dall'espressione seguente:

$$d\mathbf{F}_c = P dA_c [b_{1c} \cos \alpha_{dA_c} \hat{\mathbf{r}} + (b_{2c} \cos^2 \alpha_{dA_c} + b_{3c} \cos \alpha_{dA_c}) \hat{\mathbf{n}}_{dA_c}] \quad (2.41)$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ ha la stessa direzione e verso dell'asse del collettore mentre b_{1c} , b_{2c} e b_{3c} sono i

coefficienti di forza legati alle proprietà ottiche del film riflettente utilizzato sul collettore. La spinta elementare proiettata nella direzione dell'asse del collettore diventa, ricordando l'equazione (2.40):

$$(d\mathbf{F}_c \cdot \hat{\mathbf{r}}) = P dA_c [b_{1c} \cos \alpha_{dA_c} + (b_{2c} \cos^2 \alpha_{dA_c} + b_{3c} \cos \alpha_{dA_c}) \cos \alpha_{dA_c}] \quad (2.42)$$

Osservando che la spinta generata dal collettore ha solo componente assiale (diretta cioè lungo l'asse del collettore) in base alla simmetria assiale del problema è possibile scrivere

$$\mathbf{F}_c = \int_{A_c} d\mathbf{F}_c = \hat{\mathbf{r}} \int_{A_c} (\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{F}_c) \quad (2.43)$$

Sostituendo le (2.39) e (2.42) nella (2.43) si ottiene, dopo alcuni passaggi algebrici, la forza risultante sul collettore:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= \frac{P A_c}{12} [3 b_{2c} (\cos \xi_0 + \cos \xi_1)(\cos^2 \xi_0 + \cos^2 \xi_1) + \\ & 4 b_{3c} (\cos^2 \xi_0 + \cos \xi_0 \cos \xi_1 + \cos^2 \xi_1) + 6 b_{1c} (\cos \xi_0 + \cos \xi_1)] \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{P A_{cp}}{6} [3 b_{2c} (\cos^2 \xi_0 + \cos^2 \xi_1) + 4 b_{3c} \frac{(\cos^2 \xi_0 + \cos \xi_0 \cos \xi_1 + \cos^2 \xi_1)}{\cos \xi_1 + \cos \xi_0} + 6 b_{1c}] \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

dove l'espressione della superficie bagnata del collettore A_c è fornita, in funzione dei parametri geometrici di progetto, dalla (2.24).

Forza agente sul riflettore

Viene ora calcolata la forza propulsiva generata dal riflettore a causa dei raggi in arrivo dal collettore. A tal proposito è bene fare la seguente puntualizzazione: a causa del comportamento reale (ottico) delle superfici riflettenti, sul riflettore giungeranno sia i raggi riflessi specularmente che quelli riflessi in maniera diffusa dal collettore. Supponendo un "buon comportamento" della superficie riflettente del collettore, la frazione dei raggi riflessi specularmente s_c sarà preponderante rispetto alla frazione dei raggi riflessi in maniera diffusa $(1 - s_c)$. Indicando, come già fatto nella sezione §2.5.2, con ρ_c la frazione (rispetto alla totalità dei raggi incidenti) dei raggi riflessi dal collettore si ottiene che la frazione dei raggi riflessi specularmente dal collettore che giungono al riflettore è pari a $\rho_c s_c$.

Per uno strato riflettente di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1), il valore di s_c è 0.94 (quindi solo il 6% dei fotoni riflessi viene riflesso in maniera diffusa) mentre quello di ρ_c è 0.88, ottenendo quindi $\rho_c s_c = 0.8272$. Essendo quindi $(1 - s_c) \ll 1$ ed osservando che il modello analitico si complicherebbe notevolmente considerando anche la frazione dei fotoni riflessa in maniera diffusa, si utilizza la seguente ipotesi semplificativa: si suppone che *solo* i fotoni riflessi specularmente dal collettore vadano ad incidere sul riflettore.

In questa maniera è possibile calcolare facilmente la forza risultante sul riflettore \mathbf{F}_r utilizzando la stessa tecnica vista per il collettore ottenendo:

$$\mathbf{F}_r = -\frac{P_r A_r}{12} [3 b_{2_r} (\cos \xi_0 + \cos \xi_1)(\cos^2 \xi_0 + \cos^2 \xi_1) + 4 b_{3_r} (\cos^2 \xi_0 + \cos \xi_0 \cos \xi_1 + \cos^2 \xi_1) + 6 b_{1_r} (\cos \xi_0 + \cos \xi_1)] \hat{\mathbf{r}} \quad (2.45)$$

Anche in questo caso b_{1_r} , b_{2_r} e b_{3_r} sono i coefficienti di forza legati alle proprietà ottiche del film riflettente utilizzato sul riflettore che può essere in generale diverso da quello utilizzato sul collettore. Nell'equazione precedente A_r indica la superficie bagnata del riflettore mentre P_r è la pressione di radiazione incidente sul riflettore stesso. Per calcolare questa pressione di radiazione si può ricorrere ad un bilancio energetico ricordando il legame esistente (cfr. §2.2) in generale tra la pressione di radiazione di un'onda elettromagnetica ed il flusso di energia Φ_E ad essa associata dato dall'equazione (2.1).

L'energia per unità di tempo (e quindi la potenza) in ingresso al collettore W_c è data dalla relazione

$$W_c = P A_{c_p} c \quad (2.46)$$

Se vi fosse un comportamento ideale del collettore, questa potenza sarebbe completamente indirizzata nuovamente verso il riflettore. Visto che, come supposto in precedenza, solo i fotoni riflessi specularmente giungono al riflettore la potenza in ingresso al riflettore stesso W_r soddisfa l'espressione:

$$W_r = \rho_c s_c W_c = P A_{c_p} \rho_c s_c c \quad (2.47)$$

Ricordando che la potenza in ingresso al riflettore può essere anche scritta come

$$W_r = P_r A_{r_p} c \quad (2.48)$$

si ottiene facilmente dalle (2.47)-(2.48) la pressione di radiazione cercata P_r :

$$P_r = \frac{P A_{c_p} \rho_c s_c}{A_{r_p}} \quad (2.49)$$

Sostituendo la (2.49) nella (2.45) si ricava l'espressione finale della forza risultante sul riflettore

$$\mathbf{F}_r = -\frac{P A_{c_p} A_r \rho_c s_c}{12 A_{r_p}} [3 b_{2_r} (\cos \xi_0 + \cos \xi_1)(\cos^2 \xi_0 + \cos^2 \xi_1) + 4 b_{3_r} (\cos^2 \xi_0 + \cos \xi_0 \cos \xi_1 + \cos^2 \xi_1) + 6 b_{1_r} (\cos \xi_0 + \cos \xi_1)] \hat{\mathbf{r}} \quad (2.50)$$

Inoltre, ricordando la (2.28), si ha infine

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_r &= -\frac{P A_c \rho_c s_c}{12} [3 b_{2r} (\cos \xi_0 + \cos \xi_1)(\cos^2 \xi_0 + \cos^2 \xi_1) + \\
 &\quad 4 b_{3r} (\cos^2 \xi_0 + \cos \xi_0 \cos \xi_1 + \cos^2 \xi_1) + 6 b_{1r} (\cos \xi_0 + \cos \xi_1)] \hat{\mathbf{r}} \\
 &= -\frac{P A_{c_p} \rho_c s_c}{6} [3 b_{2r} (\cos^2 \xi_0 + \cos^2 \xi_1) + \\
 &\quad 4 b_{3r} \frac{(\cos^2 \xi_0 + \cos \xi_0 \cos \xi_1 + \cos^2 \xi_1)}{\cos \xi_1 + \cos \xi_0} + 6 b_{1r}] \hat{\mathbf{r}}
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

È interessante osservare che nel caso di comportamento ideale dei componenti $\rho_c s_c = 1$ si ottiene semplicemente $\mathbf{F}_r = -\mathbf{F}_c$ che conferma quanto ricavato da Forward^[13].

Forza agente sul direttore

Non resta che calcolare la forza propulsiva agente sullo specchio direttore il quale è stato considerato come una superficie perfettamente piana. È bene ricordare tuttavia che sono state fatte una serie di ipotesi semplificative riguardanti la capacità del direttore di “utilizzare” tutti i fotoni riflessi dal riflettore (cfr. §2.6.3). Se si considerano esclusivamente i fotoni riflessi in maniera speculare dal riflettore (con una frazione sul totale in ingresso pari a $\rho_r s_r$), la pressione di radiazione P_d in ingresso al direttore si può calcolare con un bilancio energetico come quello scritto per il riflettore e fornisce come risultato :

$$\begin{aligned}
 P_d &= \frac{P_r A_{r_p} \rho_r s_r}{A_{d_p}} \\
 &= \frac{P A_{c_p} \rho_c s_c \rho_r s_r}{A_{d_p}}
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

dove con $A_{d_p} = A_{r_p}$ si indica l’area riflettente del direttore proiettata su di un piano perpendicolare all’asse del collettore e si è fatto uso anche dell’equazione (2.49).

Utilizzando la trattazione riportata nella sezione §2.5.2 e riferita ad una vela convenzionale (piana) con modello di forza ottico si ottiene facilmente l’espressione della forza propulsiva \mathbf{F}_d agente sul direttore:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_d &= P_d A_d [b_{1_d} \cos \alpha \hat{\mathbf{r}} + (b_{2_d} \cos^2 \alpha + b_{3_d} \cos \alpha) \hat{\mathbf{n}}_d] \\
 &= \frac{P A_{c_p} A_d \rho_c s_c \rho_r s_r}{A_{d_p}} [b_{1_d} \cos \alpha \hat{\mathbf{r}} + (b_{2_d} \cos^2 \alpha + b_{3_d} \cos \alpha) \hat{\mathbf{n}}_d] \\
 &= P A_{c_p} \rho_c s_c \rho_r s_r [b_{1_d} \hat{\mathbf{r}} + (b_{2_d} \cos \alpha + b_{3_d}) \hat{\mathbf{n}}_d]
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

dove b_{1_d} , b_{2_d} e b_{3_d} sono i coefficienti di forza legati alle proprietà ottiche del film riflettente

utilizzato sul direttore che può essere in generale diverso da quello utilizzato sul collettore e sul riflettore. Nell'equazione (2.53) il versore $\hat{\mathbf{n}}_d$ indica il versore normale allo specchio, come riportato nella Figura 2.21 mentre α è l'angolo di cono del direttore. Si osservi infine come nel passaggio tra la seconda e la terza riga dell'equazione (2.53) si sia fatto uso della relazione (2.32).

Forza complessiva agente sulla vela

Sommando vettorialmente le forze agenti sul collettore, riflettore e direttore si ottiene la forza complessiva agente sulla vela composta:

$$\mathbf{F}_o = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_d \quad (2.54)$$

Ricorrendo alle espressioni precedentemente ricavate (2.44) (per il collettore), (2.51) (per il riflettore) e (2.53) (per il direttore) si ricava l'accelerazione \mathbf{a}_o cui è soggetta la vela composta di massa complessiva m :

$$\mathbf{a}_o = \frac{P A_{c_p}}{m} [\mathcal{A} \hat{\mathbf{r}} + (\mathcal{B} \cos \alpha + \mathcal{C}) \hat{\mathbf{n}}_d] \quad (2.55)$$

dove si è posto per brevità di scrittura:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \triangleq & \frac{1}{6} \left[3 b_{2_c} \left(1 - \frac{b_{2_r}}{2} \right) (\cos^2 \xi_0 + \cos^2 \xi_1) + \right. \\ & 4 \left(b_{3_c} - \frac{b_{2_c} b_{3_r}}{2} \right) \frac{(\cos^2 \xi_0 + \cos \xi_0 \cos \xi_1 + \cos^2 \xi_1)}{\cos \xi_0 + \cos \xi_1} + \\ & \left. 6 \left(b_{1_c} - \frac{b_{2_c} b_{1_r}}{2} \right) \right] + \frac{b_{2_c} b_{2_r} b_{1_d}}{4} \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\mathcal{B} \triangleq \frac{b_{2_c} b_{2_r} b_{2_d}}{4} \quad (2.57)$$

$$\mathcal{C} \triangleq \frac{b_{2_c} b_{2_r} b_{3_d}}{4} \quad (2.58)$$

Nelle equazioni precedenti si è fatto uso della relazione (2.11) ponendo in questo modo $\rho_c s_c = b_{2_c}/2$ e $\rho_r s_r = b_{2_r}/2$. L'equazione (2.55), estremamente compatta, costituisce un nuovo risultato ancora non presente nella letteratura tecnica riguardante le vele solari composte. I coefficienti di forza \mathcal{B} e \mathcal{C} dipendono esclusivamente dalle proprietà ottiche del materiale riflettente mentre \mathcal{A} dipende anche dalla geometria del collettore attraverso gli angoli ξ_0 e ξ_1 . Si osservi infine come nel caso ideale (quello cioè studiato da Forward) si abbia $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 2$ e $\mathcal{C} = 0$ fornendo quindi esattamente la relazione (2.37).

Nel caso in cui il materiale riflettente utilizzato per i tre componenti sia il medesimo,

si può porre nelle equazioni (2.56)–(2.58)

$$b_{1_c} \equiv b_{1_r} \equiv b_{1_d} = b_1$$

$$b_{2_c} \equiv b_{2_r} \equiv b_{2_d} = b_2$$

$$b_{3_c} \equiv b_{3_r} \equiv b_{3_d} = b_3$$

ottenendo i tre coefficienti di forza semplificati:

$$\mathcal{A}' \triangleq \frac{2-b_2}{12} \left[3b_2 (\cos^2 \xi_0 + \cos^2 \xi_1) + 4b_3 \frac{(\cos^2 \xi_0 + \cos \xi_0 \cos \xi_1 + \cos^2 \xi_1)}{\cos \xi_0 + \cos \xi_1} + 6b_1 \right] + \frac{b_2^2 b_1}{4} \quad (2.59)$$

$$\mathcal{B}' \triangleq \frac{b_2^3}{4} \quad (2.60)$$

$$\mathcal{C}' \triangleq \frac{b_2^2 b_3}{4} \quad (2.61)$$

dove l'apice (') è stato utilizzato per distinguere i coefficienti di forza dal caso generale in cui vengono utilizzati materiali differenti sui tre componenti. Per congruenza si indica a questo punto con \mathbf{a}'_o l'accelerazione della vela composta nel caso in cui venga utilizzato lo stesso materiale riflettente per tutti e tre i componenti:

$$\mathbf{a}'_o = \frac{P A_{c_p}}{m} [\mathcal{A}' \hat{\mathbf{r}} + (\mathcal{B}' \cos \alpha + \mathcal{C}') \hat{\mathbf{n}}_d] \quad (2.62)$$

Il grafico del coefficiente di forza \mathcal{A}' è stato riportato in Figura 2.24 prendendo come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1). Dalla Figura 2.24 si osserva che il valore di \mathcal{A}' è sostanzialmente indipendente dal fattore di concentrazione χ quando quest'ultimo è maggiore di 50 come assunto nella trattazione. La spiegazione di questo comportamento è legata al fatto che per $\chi \gg 1$ in base alla (2.23) si ottiene $\xi \ll 1$ e quindi $\cos \xi_1 \simeq 1$ nell'equazione (2.59). Nel caso in cui l'angolo $\xi_0 = 15 \text{ deg}$ (cfr. §2.6.3) i coefficienti di forza \mathcal{A}' , \mathcal{B}' e \mathcal{C}' assumono i valori numerici riportati nella Tabella 2.3.

	Ideale	Al-Kapton
\mathcal{A}'	0	0.4225
\mathcal{B}'	2	1.1320
\mathcal{C}'	0	-0.0075

Tabella 2.3: Coefficienti di forza \mathcal{A}' , \mathcal{B}' e \mathcal{C}' per una vela composta avente uno strato di alluminio-Kapton come superficie riflettente ($\xi_0 = 15 \text{ deg}$ e $\chi = 100$ con un conseguente $\xi_1 = 1.4831 \text{ deg}$) e confrontato con il caso ideale.

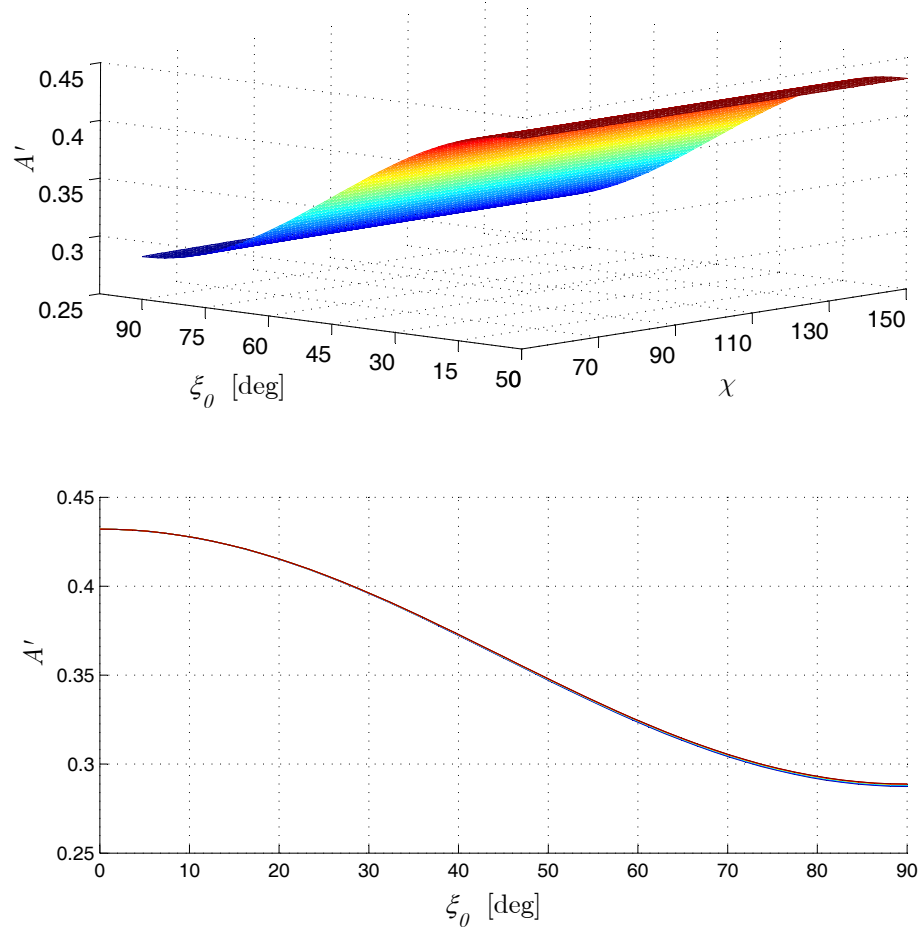


Figura 2.24: Coefficiente di forza \mathcal{A}' in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore e del fattore di concentrazione χ per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).

Considerazioni sull'accelerazione a'_o

È interessante a questo punto studiare la dipendenza del modulo dell'accelerazione $a'_o = |\mathbf{a}'_o|$ della vela composta nel modello di forza ottico dai parametri geometrici caratteristici. Dall'equazione (2.62) risulta:

$$a'_o = \frac{P A_{c_p}}{m} \sqrt{\mathcal{A}'^2 + (\mathcal{B}' \cos \alpha + \mathcal{C}')^2 + 2 \mathcal{A}' \cos \alpha (\mathcal{B}' \cos \alpha + \mathcal{C}')} \quad (2.63)$$

Nella Figura 2.25 è stata riportata l'accelerazione adimensionalizzata $a'_o/(P A_{c_p}/m)$ della vela composta nel modello di forza ottico in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore e dell'angolo di cono del direttore α prendendo come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1). Nella stessa Figura è stata anche riportata l'accelerazione adimensionalizzata della vela composta nel caso ideale $a_i/(P A_{c_p}/m) = 2 \cos \alpha$ calcolata attraverso l'equazione (2.37).

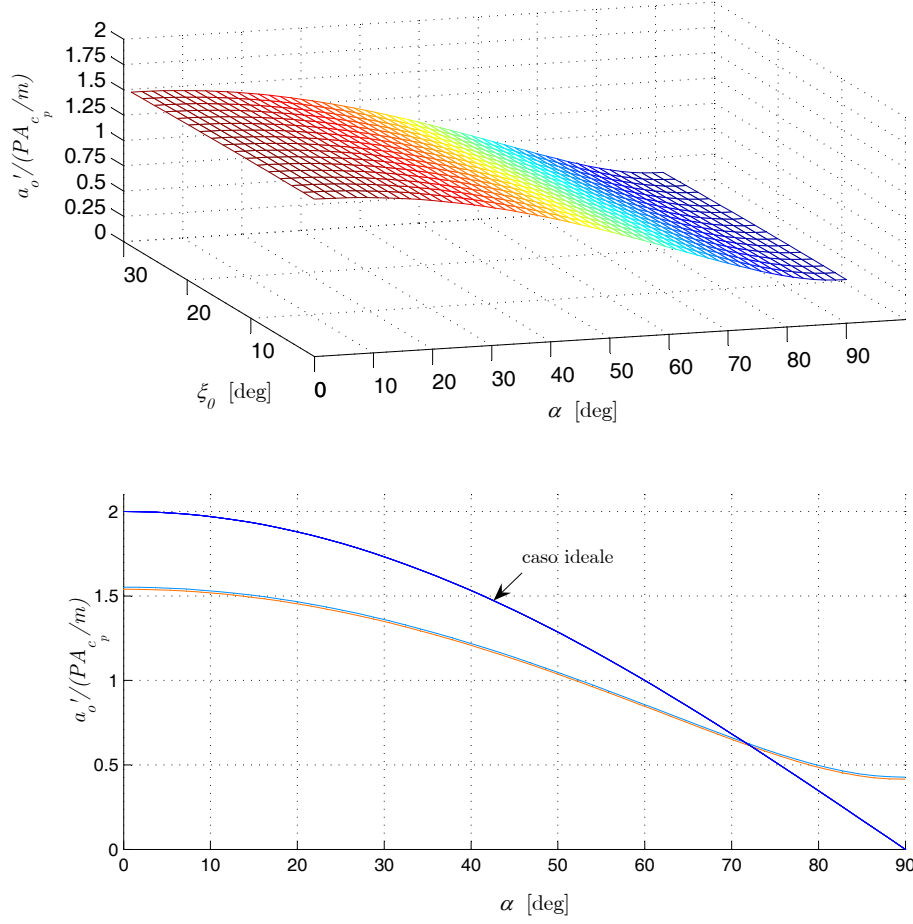


Figura 2.25: Accelerazione adimensionalizzata $a'_o/(P A_{c_p}/m)$ nel modello di forza ottico in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore ($\chi = 100$) e dell'angolo di cono del direttore α per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).

A differenza di quanto accadeva per la vela convenzionale (cfr. §2.5.2), nel caso di vela composta esiste un valore dell'angolo di cono α_{io} al di sopra del quale il modulo dell'accelerazione generata nel modello ottico è maggiore di quella ottenibile nel caso ideale. Il valore in questione dell'angolo di controllo si ottiene risolvendo rispetto ad α l'equazione seguente (basta porre $a'_o = a_i$):

$$\mathcal{A}'^2 + (\mathcal{B}' \cos \alpha + \mathcal{C}')^2 + 2 \mathcal{A}' \cos \alpha (\mathcal{B}' \cos \alpha + \mathcal{C}') = 4 \cos^2 \alpha$$

da cui si ottiene dopo alcuni semplici passaggi algebrici:

$$\cos \alpha_{io} = \frac{-\mathcal{C}' (\mathcal{A}' + \mathcal{B}') - \sqrt{\mathcal{C}'^2 \mathcal{A}'^2 - \mathcal{B}'^2 \mathcal{A}'^2 + 4 \mathcal{A}'^2 + 4 \mathcal{C}'^2 - 2 \mathcal{A}'^3 \mathcal{B}'}}{\mathcal{B}'^2 + 2 \mathcal{A}' \mathcal{B}' - 4} \quad (2.64)$$

La variazione dell'angolo α_{io} in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore (assumendo $\chi = 100$) è stata riportata nella Figura 2.26. Per angoli ξ_0 piccoli (dell'ordine di 15 deg o meno), il

valore di α_{io} si aggira nell'intorno di 72 deg.

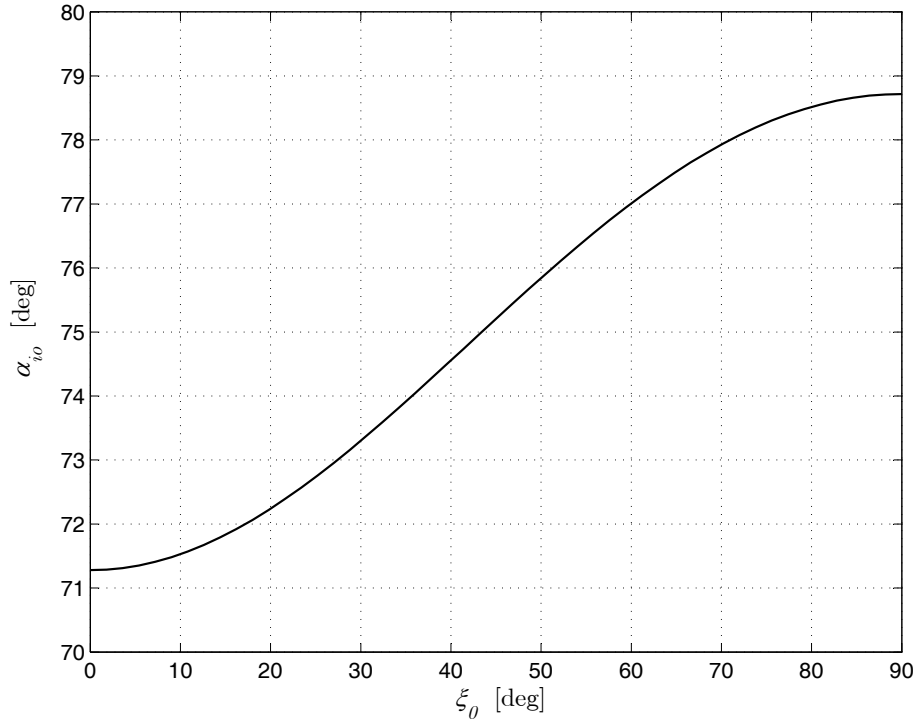


Figura 2.26: Angolo α_{io} in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore ($\chi = 100$) per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).

Il massimo valore dell'accelerazione propulsiva della vela composta viene raggiunto ovviamente, e come nei casi precedentemente studiati, per $\alpha = 0$ ed è dato, per la (2.63), dalla seguente espressione:

$$\max(a'_o) = \frac{P A_{c_p}}{m} \sqrt{\mathcal{A}'^2 + (\mathcal{B}' + \mathcal{C}')^2 + 2 \mathcal{A}' (\mathcal{B}' + \mathcal{C}')} \quad (2.65)$$

Anche la massima differenza (in modulo) tra il modulo dell'accelerazione nel caso ideale rispetto a quello ottico si raggiunge per $\alpha = 0$ ed è pari a:

$$\max \left| \frac{a_i}{P A_{c_p}/m} - \frac{a_o}{P A_{c_p}/m} \right| = 2 - \sqrt{\mathcal{A}'^2 + (\mathcal{B}' + \mathcal{C}')^2 + 2 \mathcal{A}' (\mathcal{B}' + \mathcal{C}')} \quad (2.66)$$

ed è stata disegnata nella Figura 2.28. Nella Figura 2.28, a scopo comparativo, è stata anche riportata il modulo della differenza tra l'accelerazione nel caso ideale e quella nel caso ottico quando si assume un angolo $\alpha = \pi/2$.

Come si osserva dalla Figura 2.25, nel modello di forza ottico non è possibile annullare la spinta propulsiva generata dalla vela, neanche per $\alpha = \pi/2$. Fisicamente questo

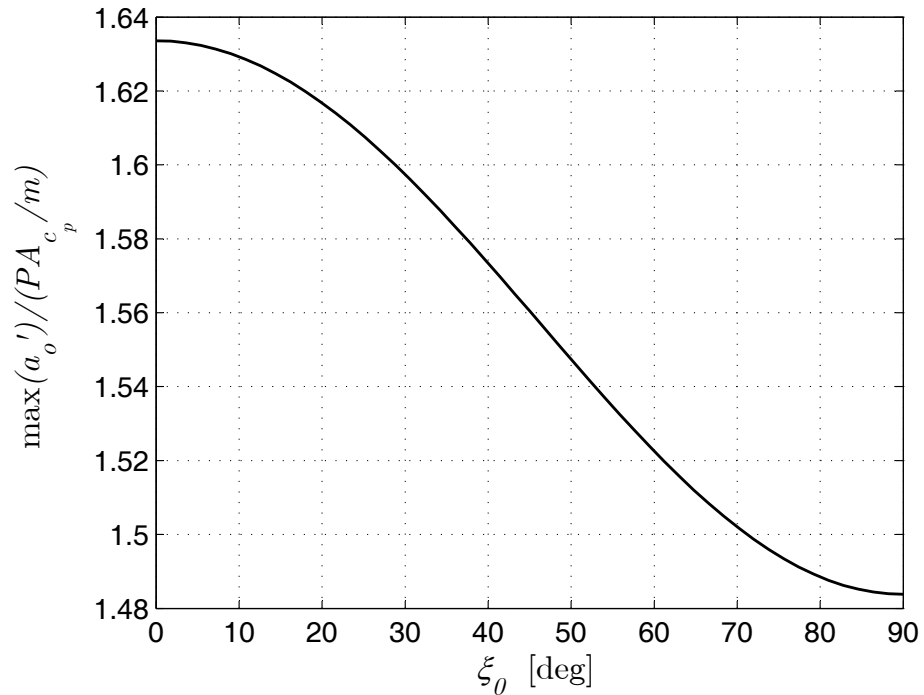


Figura 2.27: Massimo valore $\max(a'_o)/(P A_{c_p}/m)$ dell'accelerazione adimensionalizzata in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore ($\chi = 100$) per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).

comportamento è legato alla differenza in modulo dell'accelerazione generata dal collettore rispetto a quella generata dal riflettore. Questa differenza, diversa da zero a causa della presenza del termine $b_2/2$ dovuto alla riflessione speculare non completa dei fotoni da parte del materiale riflettente, causa un'accelerazione (e quindi una spinta) sempre diretta lungo l'asse del collettore che non può essere annullata in alcun modo utilizzando il direttore (a cui è legato l'angolo di controllo). Da un punto di vista pratico, questo comportamento non permette l'esistenza di tratti di volo per inerzia nelle traiettorie seguite dalla vela composta con modello ottico a differenza di quanto accadeva nel modello ideale.

2.7 Regione dei controlli ammissibili \mathcal{U}

È opportuno riassumere brevemente qual è l'intervallo di variazione ammissibile \mathcal{U} (chiamato in seguito *regione dei controlli ammissibili*) all'interno del quale possono essere selezionati gli angoli di controllo della vela solare. Questi angoli di controllo coincidono con l'angolo di cono α e di azimut δ per la vela convenzionale e composta con il modello di forza ideale ed ottico. Nel caso di vela convenzionale con modello di forza parametrico l'angolo di cono è stato sostituito con l'angolo θ_p per la cui definizione e significato geometrico si rimanda alla sezione §2.5.3.

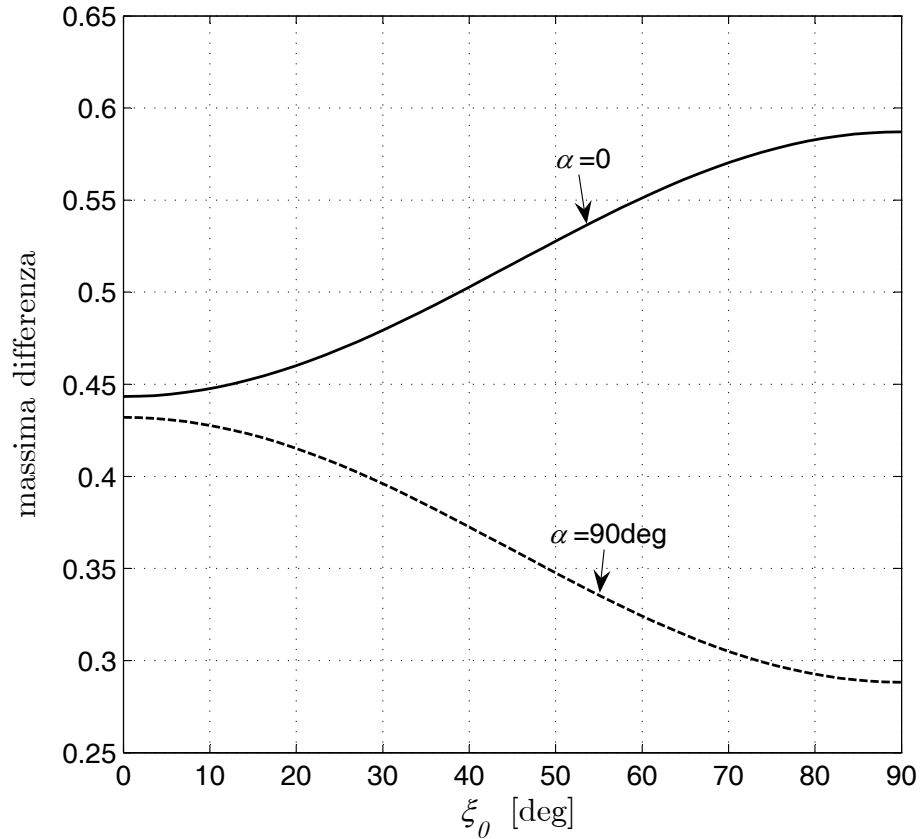


Figura 2.28: Valore di $\max \left| \frac{a_i}{P A_{c_p}/m} - \frac{a_o}{P A_{c_p}/m} \right|$ in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore ($\chi = 100$) per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).

Vela convenzionale

Considerando le sezioni §2.5.1, §2.5.2 e §2.5.3 si ottiene:

$$\mathcal{U} = \{\alpha \in [0, \pi/2]; \delta \in [-\pi, \pi]\} \quad \text{modello ideale e ottico} \quad (2.67)$$

$$\mathcal{U} = \{\theta_p \in [0, \theta_p^*]; \delta \in [-\pi, \pi]\} \quad \text{modello parametrico} \quad (2.68)$$

Vela composta o SPT

Ricordando che gli angoli di controllo nella vela composta sono riferiti alla superficie riflettente del direttore (cfr. §2.6.4 e §2.6.5) si ha:

$$\mathcal{U} = \{\alpha \in [0, \pi/2]; \delta \in [-\pi, \pi]\} \quad \text{modello ideale e ottico} \quad (2.69)$$

2.8 Accelerazione caratteristica della vela

Come discusso nella sezione §2.3, il parametro di snellezza β è di fondamentale importanza nella definizione delle prestazioni di una vela solare. In letteratura talvolta viene utilizzato, al posto di β , un altro parametro chiamato *accelerazione caratteristica*.

L'accelerazione caratteristica a_c è definita come il modulo massimo dell'accelerazione (ponendo $\alpha = 0$) sperimentata dalla vela quando questa si trova ad una distanza pari ad una unità astronomica dal Sole ($r = r_{\oplus} \triangleq 1 \text{ AU}$) ovvero alla distanza media Terra-Sole. Visto che l'accelerazione della vela in generale dipende dalle caratteristiche ottiche del materiale riflettente, si deduce che a_c sarà anch'essa una funzione dei coefficienti di forza b_1 , b_2 e b_3 (cfr. 2.5.2). Per completezza è bene osservare che in molte fonti bibliografiche si parla di accelerazione caratteristica assumendo implicitamente ed esclusivamente un modello di forza ideale.

Sfruttando le espressioni delle accelerazioni calcolate nelle sezioni precedenti è possibile esprimere a_c in funzione del parametro di snellezza β per le due classi di vela e per i tre modelli di forza, come di seguito descritto.

Vela convenzionale

$$a_c = \frac{\beta \mu_{\odot}}{r_{\oplus}^2} \quad \text{modello ideale} \quad (2.70)$$

$$a_c = \frac{\beta (b_1 + b_2 + b_3)}{2} \frac{\mu_{\odot}}{r_{\oplus}^2} \quad \text{modello ottico e parametrico} \quad (2.71)$$

Vela SPT

Si osservi come in questo caso il parametro di snellezza β sia calcolato utilizzando l'area proiettata della superficie riflettente del collettore su di un piano perpendicolare alla direzione di propagazione dei raggi solari.

$$a_c = \frac{\beta \mu_{\odot}}{r_{\oplus}^2} \quad \text{modello ideale} \quad (2.72)$$

$$a_c = \frac{\beta (\mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}')}{2} \frac{\mu_{\odot}}{r_{\oplus}^2} \quad \text{modello ottico} \quad (2.73)$$

2.9 Conclusioni

In questo Capitolo sono stati introdotti i modelli relativi alla spinta generata dalla pressione di radiazione su di una generica vela solare. Per quel che riguarda la classe è stata

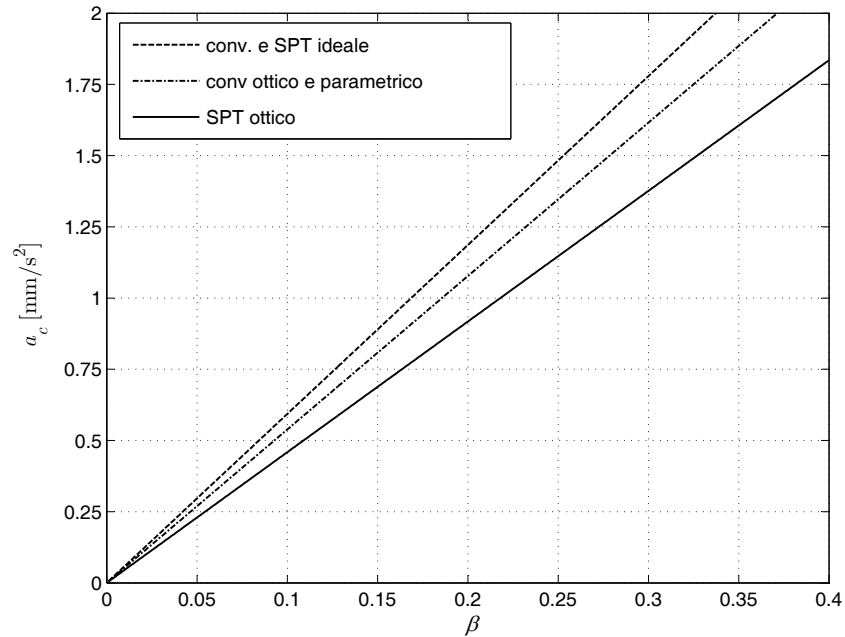


Figura 2.29: Accelerazione caratteristica a_c in funzione del parametro di snellezza β per una vela convenzionale e per una vela composta ($\chi = 100$ e $\xi_0 = 15$ deg per il modello ottico) aventi come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).

considerata una vela convenzionale, con modello di forza ideale, ottico e parametrico, ed una vela composta con modello di forza ideale ed ottico. Per la vela convenzionale con modello di forza ideale, ottico e parametrico e la vela composta ideale i modelli di spinta sono ben noti in letteratura e per questo motivo sono stati brevemente accennati riferendo, ove possibile, la trattazione matematica alle relative fonti bibliografiche.

Per quel che riguarda invece la vela composta con modello di forza ottico, i risultati ottenuti sono originali ed estendono il lavoro di Forward relativo alla vela composta ideale.

Sono stati infine introdotti dei concetti fondamentali come il parametro di snellezza della vela e l'accelerazione caratteristica che rivestiranno una grande importanza nei Capitoli seguenti.

3

Traiettorie Ottime di *Rendez-Vous* Interplanetario

3.1 Introduzione

In questo Capitolo viene affrontato il problema del calcolo della legge di controllo che permette di minimizzare il tempo necessario ad effettuare una missione di *rendez-vous* interplanetaria, utilizzando un veicolo spaziale il cui sistema propulsivo principale è costituito da una vela solare. L'ottimizzazione della traiettoria di una vela solare con un modello di forza ideale (vale a dire perfettamente riflettente) in cui quindi la spinta è perpendicolare al piano nominale della vela supposta piana ed indeformabile è stato più volte trattato in letteratura. Zhukov e Lebedev^[18] hanno utilizzato per primi la teoria classica del calcolo variazionale per ottimizzare la traiettoria di una vela solare convenzionale ideale nel caso di orbite circolari e complanari. Utilizzando un approccio simile, il problema è stato generalizzato da Sauer^[19], il quale ha tenuto in conto l'inclinazione e l'ellitticità delle orbite dei pianeti coinvolti nel trasferimento. Altri contributi interessanti all'argomento sono stati forniti da Wood et al.^[20], Subba Rao e Ramanan^[21], Simon e Zakharov^[22]. Più recentemente Cichan e Melton^[23] hanno studiato le traiettorie ottime per una vela non ideale, includendo gli effetti della riflessione non speculare dei fotoni incidenti e della curvatura del piano della vela causato dal carico di pressione a cui è soggetta. Tuttavia nel loro studio sono state considerate solo orbite piane e circolari ed è stato utilizzata una tecnica di ottimizzazione diretta. Infine Colasurdo e Casalino^[24] hanno proposto di recente un metodo indiretto per minimizzare il tempo di missione in un trasferimento interplanetario pur considerando ancora una vela ideale in un problema puramente bidimensionale e non calcolando esplicitamente la legge di controllo.

In questo Capitolo verrà considerata una vela solare reale, tenendo in conto sia la riflessione non perfettamente speculare dei fotoni, sia la curvatura del piano riflettente. Inoltre

il problema del trasferimento interplanetario verrà trattato in maniera completamente tridimensionale, considerando i parametri reali delle orbite dei pianeti coinvolti. L'analisi presentata segue (ed estende) quella condotta da Sauer^[19] e riferita ad una vela convenzionale ideale. Verrà presentata un'espressione in forma chiusa della legge di controllo ottima utilizzando la teoria del calcolo variazionale e verranno esplicitati i collegamenti esistenti tra i parametri caratteristici della vela (legati alle caratteristiche termo-ottiche del materiale riflettente) ed il valore ottimo degli angoli di controllo.

3.2 Equazioni del moto

Le equazioni del moto di una vela solare nel sistema di riferimento inerziale eliocentrico-eclittico $\mathcal{T}_\odot(x,y,z)$ (cfr. §2.4) sono in forma vettoriale:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu_\odot}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a} \quad (3.2)$$

dove $[\mathbf{r}]_{\mathcal{T}_\odot} = [r_x, r_y, r_z]^T$ e $[\mathbf{v}]_{\mathcal{T}_\odot} = [v_x, v_y, v_z]^T$ sono rispettivamente i vettori posizione e velocità del veicolo spaziale le cui componenti sono espresse nel sistema di riferimento \mathcal{T}_\odot , mentre \mathbf{a} è l'accelerazione propulsiva dovuta alla vela solare e legata alla pressione di radiazione solare (cfr. §2.2).

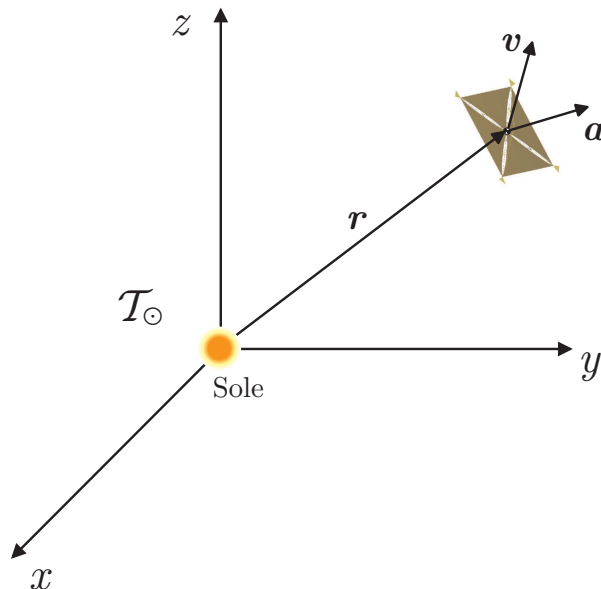


Figura 3.1: Sistema di riferimento utilizzato nella scrittura delle equazioni del moto.

Essendo lo stato del veicolo spaziale ad un certo istante di tempo univocamente determinato attraverso le tre componenti della posizione e le tre componenti della velocità nel sistema di riferimento inerziale \mathcal{T}_{\odot} , si assume un vettore di stato \mathbf{x} definito come:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{T}_{\odot}} \triangleq [r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z]^T = [\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T]^T \quad (3.3)$$

L'espressione dell'accelerazione propulsiva \mathbf{a} in funzione degli angoli di controllo della vela e delle caratteristiche del materiale riflettente dipende, come già visto nel capitolo 2 dalla classe della vela (convenzionale o composta) e dal tipo di modello di forza utilizzato (ideale, ottico e parametrico).

Di seguito si richiamano brevemente i risultati ottenuti nel Capitolo 2 scrivendo in questo modo l'espressione dell'accelerazione propulsiva \mathbf{a} .

3.2.1 Vela convenzionale

Come già dichiarato precedentemente, in questa Tesi si indica come “convenzionale” quella classe di vela comunemente denominata in letteratura con il termine “piana” (*flat*). Sia inoltre β il parametro di snellezza che ne definisce, in un certo senso, le prestazioni (cfr. §2.3). L'orientamento della vela è definito attraverso le componenti del suo versore normale $\hat{\mathbf{n}}$ le quali, nel sistema di riferimento orbitale \mathcal{T}_{orb} , sono date da (si veda Figura 2.3):

$$[\hat{\mathbf{n}}]_{\mathcal{T}_{orb}} = [\cos \alpha, \sin \alpha \cos \delta, \sin \alpha \sin \delta]^T \quad (3.4)$$

Modello ideale

Supponendo che la superficie riflettente di cui è dotata la vela solare si comporti in maniera ideale, vale a dire che rifletta in maniera speculare i raggi incidenti senza assorbirli o trasmetterli in alcun modo, si può utilizzare l'equazione (2.7), la quale lega l'accelerazione \mathbf{a} al versore normale alla vela $\hat{\mathbf{n}}$ (nella direzione dei raggi incidenti) e che per completezza viene di seguito riportata:

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_i = \frac{\beta \mu_{\odot}}{r^2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \hat{\mathbf{n}} = \frac{\beta \mu_{\odot}}{r^2} \cos^2 \alpha \hat{\mathbf{n}} \quad (3.5)$$

Nell'espressione precedente si osserva anche la dipendenza del modulo dell'accelerazione dall'angolo di cono α definito nell'equazione (2.5) e visualizzato nella Figura 2.4.

Modello ottico

Considerando il comportamento ottico reale della vela (cfr. §2.5.2), attraverso i coefficienti di forza b_1 , b_2 e b_3 riportati in nella Tabella 2.1, si ottiene l'espressione dell'accelerazione

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_o &= \frac{\beta \mu_\odot}{2r^2} \left[b_1 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + \left(b_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 + b_3 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right) \hat{\mathbf{n}} \right] \\ &= \frac{\beta \mu_\odot}{2r^2} \left[b_1 \cos \alpha \hat{\mathbf{r}} + (b_2 \cos^2 \alpha + b_3 \cos \alpha) \hat{\mathbf{n}} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

in cui compare esplicitamente la dipendenza dall'angolo di cono α .

Modello parametrico

Se si tiene conto anche della reale curvatura della vela causata dal carico di pressione esercitato dalla radiazione solare incidente (cfr. §2.5.3), l'accelerazione \mathbf{a} è data dall'espressione:

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_p = \frac{\beta}{2} \frac{\mu_\odot}{r^2} (c_1 + c_2 \cos^4 \theta_p + c_3 \cos^2 \theta_p) \hat{\mathbf{a}}_p \quad \text{con } \theta_p \in [0, \theta_p^*] \quad (3.7)$$

dove θ_p è l'angolo di cono della spinta, ovvero l'angolo formato dalla direzione dei raggi incidenti con la direzione della spinta propulsiva della vela dato dall'equazione (2.16), mentre θ_p^* è il valore massimo ammissibile per θ_p fornito dall'equazione (2.20). Indicando con δ_p l'angolo di azimut del versore $\hat{\mathbf{a}}_p$, con la stessa procedura utilizzata per il versore normale alla vela si determinano le componenti dell'accelerazione propulsiva della vela nel sistema di riferimento orbitale \mathcal{T}_{orb} (si veda la Figura 3.2):

$$[\hat{\mathbf{a}}_p]_{\mathcal{T}_{orb}} = [\cos \theta_p, \sin \theta_p \cos \delta_p, \sin \theta_p \sin \delta_p]^T \quad (3.8)$$

3.2.2 Vela composta

Per quel che riguarda la vela composta o SPT sono stati considerati due modelli di forza: ideale, in cui vi è una perfetta riflessione dei raggi solari; ed ottico, che tiene conto del comportamento reale del materiale riflettente.

Modello ideale

Com'è stato dimostrato da Forward^[13], l'accelerazione \mathbf{a} della vela solare composta è data dall'espressione seguente (cfr. §2.6.4):

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_i = \frac{\beta \mu_\odot}{r^2} (\hat{\mathbf{n}}_d \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{n}}_d = \frac{\beta \mu_\odot}{r^2} \cos \alpha \hat{\mathbf{n}}_d \quad (3.9)$$

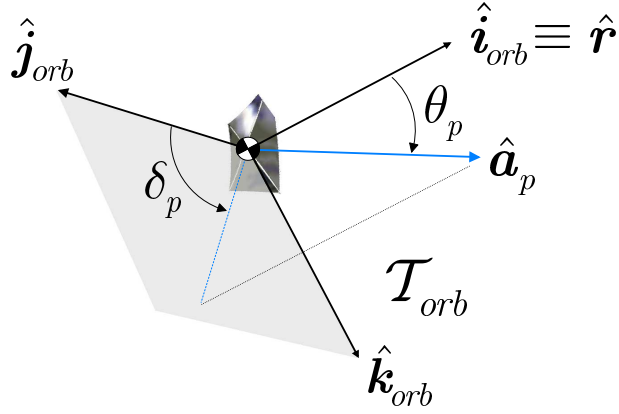


Figura 3.2: Angoli che definiscono l'orientamento del versore di spinta in \mathcal{T}_{orb} nel modello di forza parametrico relativo ad una vela convenzionale.

dove in questo caso l'angolo di cono α è l'angolo formato dalla direzione dei raggi incidenti $\hat{\mathbf{r}}$ (che coincide con l'asse del collettore) con la normale allo specchio direttore $\hat{\mathbf{n}}_d$, come indicato nella Figura 2.11 mentre β è calcolato considerando l'area proiettata A_{c_p} del collettore.

L'equazione (3.9) si presta ad una interessante interpretazione di carattere puramente geometrico. Infatti indicando con $\tilde{\mathbf{a}}$ l'accelerazione normalizzata della vela, ovvero:

$$\tilde{\mathbf{a}} \triangleq \frac{\mathbf{a}}{\beta \mu_{\odot} / r^2} = \cos \alpha \hat{\mathbf{n}}_d \quad (3.10)$$

si ricava che, variando con continuità l'angolo di cono α tra il suo valore minimo (0) ed il suo valore massimo ($\pi/2$), la punta del vettore $\tilde{\mathbf{a}}$ descrive nello spazio una sfera perfetta di raggio 1/2 il cui diametro è pari proprio all'accelerazione normalizzata massima (che si ottiene per $\alpha = 0$) e che è uguale ad uno. La sfera in questione può essere pensata appoggiata al piano (y_{orb}, z_{orb}) del sistema di riferimento orbitale, come indicato schematicamente in Figura 3.3. Per questo motivo si può parlare di una “sfera di esistenza” dell'accelerazione normalizzata $\tilde{\mathbf{a}}$.

Modello ottico

Ricordando la trattazione riportata nella sezione §2.6.5, l'accelerazione \mathbf{a}_o della vela solare composta nel modello di forza ottico ha l'espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_o &= \frac{\beta \mu_{\odot}}{2 r^2} [\mathcal{A} \hat{\mathbf{r}} + (\mathcal{B} \hat{\mathbf{n}}_d \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{C}) \hat{\mathbf{n}}_d] \\ &= \frac{\beta \mu_{\odot}}{2 r^2} [\mathcal{A} \hat{\mathbf{r}} + (\mathcal{B} \cos \alpha + \mathcal{C}) \hat{\mathbf{n}}_d] \end{aligned} \quad (3.11)$$

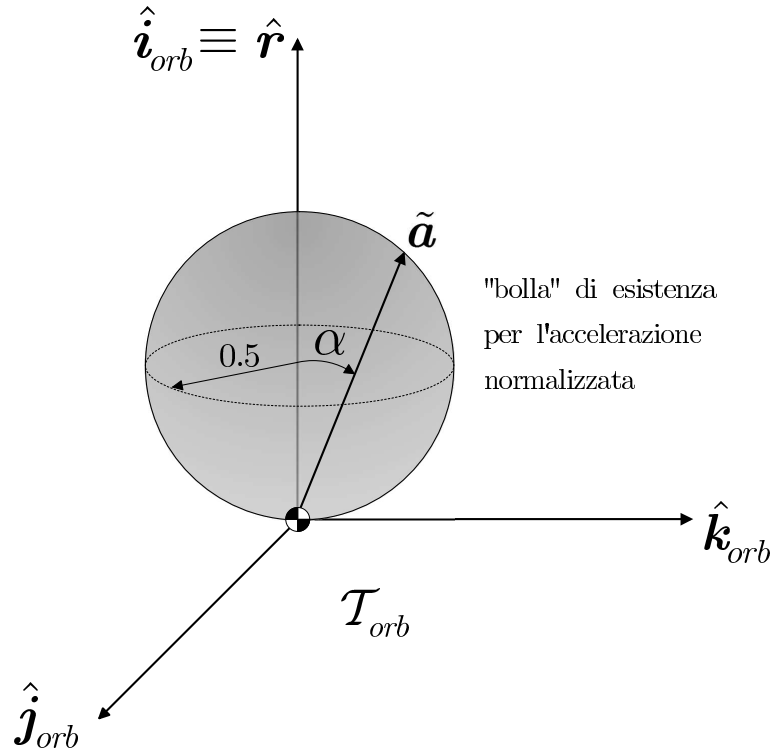


Figura 3.3: Sfera o “bolla” di esistenza dell’accelerazione normalizzata $\tilde{\mathbf{a}}$ nel caso di vela composta con modello di forza ideale.

I coefficienti di forza \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} , le cui espressioni sono riportate nelle equazioni (2.56)–(2.58) tengono conto della possibilità di utilizzare materiali riflettenti diversi nei tre componenti della vela SPT. Nel caso in cui il materiale sia lo stesso in tutti i componenti, i coefficienti di forza vengono indicati con un apice (\mathcal{A}' , \mathcal{B}' e \mathcal{C}') e le loro espressioni sono rispettivamente (2.59)–(2.61). Una volta fissato il materiale riflettente, i valori numerici dei coefficienti di forza dipendono in ultima analisi dai parametri geometrici χ e ξ_0 . Ponendo $\xi_0 = 15$ deg e $\chi = 100$ i valori di \mathcal{A}' , \mathcal{B}' e \mathcal{C}' sono stati riportati nella Tabella 2.3.

3.3 Formulazione del problema variazionale

L’obiettivo è quello di determinare la storia temporale del controllo \mathbf{u} in maniera tale da minimizzare l’intervallo di tempo $\Delta t = t_f - t_0 \equiv t_f$ necessario a trasferire un veicolo spaziale il cui sistema di propulsione principale è costituito da una vela solare, da uno stato iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ al tempo $t_0 = 0$ ad uno stato finale $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ al tempo $t_0 = t_f$. Entrambi i tempi sono noti ed assegnati.

Questo equivale a risolvere un problema di *rendez-vous* ottimo vincolato, in cui cioè si estremizza (massimizza o minimizza a seconda dei casi) un assegnato indice di prestazione (o funzionale) rispettando al contempo alcuni vincoli imposti al sistema. Nel caso in esame

si è scelto di massimizzare il funzionale J definito come:

$$J = -t_f \quad (3.12)$$

I vincoli imposti al sistema sono costituiti dallo stato iniziale e finale del veicolo spaziale (necessari al fine di ottenere il *rendez-vous* desiderato) e dall'intervallo di variazione ammissibile degli angoli di controllo del sistema \mathcal{U} (cfr. §2.7).

In questa tesi il problema di ottimo è stato risolto utilizzando un metodo indiretto, il quale si basa matematicamente sulla teoria classica del calcolo delle Variazioni. A tale scopo è stata determinata la funzione Hamiltoniana^[25] (nel seguito indicata semplicemente con il termine Hamiltoniana) del sistema:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu_\odot}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{a} \quad (3.13)$$

dove $\boldsymbol{\lambda}_r \triangleq [\lambda_{r_x}, \lambda_{r_y}, \lambda_{r_z}]^T$ e $\boldsymbol{\lambda}_v \triangleq [\lambda_{v_x}, \lambda_{v_y}, \lambda_{v_z}]^T$ sono, rispettivamente, i vettori delle variabili aggiunte alla posizione \mathbf{r} e alla velocità \mathbf{v} .

In letteratura^[26] il vettore $\boldsymbol{\lambda}_v$ è noto come *primer vector* ed il suo orientamento nel sistema orbitale \mathcal{T}_{orb} è definito in questo caso attraverso due angoli: l'angolo di cono del primer $\alpha_\lambda \in [0, \pi]$ e l'angolo di azimut del primer $\delta_\lambda \in [-\pi, \pi]$, come indicato nella Figura 3.4 dove $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v \triangleq \boldsymbol{\lambda}_v / \lambda_v$ è il versore corrispondente. Come già fatto per il versore normale

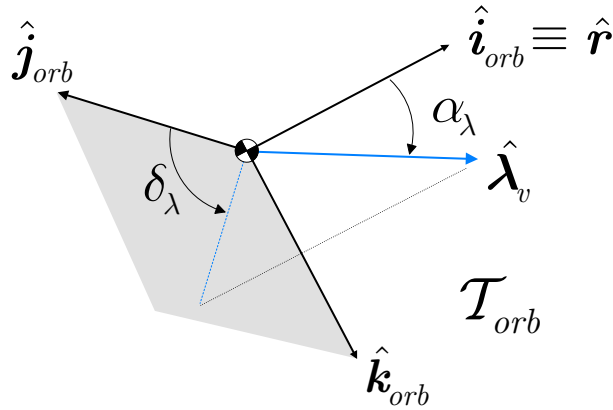


Figura 3.4: Angoli che definiscono l'orientamento del primer vector nel sistema di riferimento orbitale.

alla vela $\hat{\mathbf{n}}$ nell'equazione (3.4), è conveniente esprimere $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$ in funzione dei due angoli di cono α_λ e di azimut δ_λ :

$$[\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v]_{\mathcal{T}_{orb}} = [\cos \alpha_\lambda, \sin \alpha_\lambda \cos \delta_\lambda, \sin \alpha_\lambda \sin \delta_\lambda]^T \quad (3.14)$$

Indicando la porzione dell'Hamiltoniana che dipende esplicitamente dai controlli con

il termine H' (che in seguito verrà chiamata *Hamiltoniana ridotta*) si ricava facilmente dall'equazione (3.13) e tenendo presente §3.2 si ha:

$$H' \triangleq \boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{a} \quad (3.15)$$

Invocando il principio del massimo di Pontryagin (PMP), il problema di ottimo può essere enunciato nella maniera seguente: determinare la legge di controllo $\mathbf{u}(t)$ con $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ in maniera tale da massimizzare globalmente, ad ogni istante la funzione Hamiltoniana H (ovvero H'), rispettando i vincoli imposti sullo stato iniziale e finale del sistema (si legga posizione-velocità della sonda e condizione di trasversalità). In termini matematici:

$$\mathbf{u} = \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} H \equiv \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} H' \quad (3.16)$$

3.3.1 Equazioni di Eulero-Lagrange

La derivata temporale delle variabili aggiunte al problema è fornita dalle equazioni di Eulero-Lagrange^[27]:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu_\odot}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_v - \frac{3\mu_\odot}{r^3} (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{a})}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = -\boldsymbol{\lambda}_r - \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{a})}{\partial \mathbf{v}} \quad (3.18)$$

la cui espressione esplicita dipende dal modello di accelerazione propulsiva (e quindi di vela) adottata.

Vela convenzionale con modello di forza ideale

Sostituendo l'espressione dell'accelerazione propulsiva (3.5) nelle equazioni (3.17)–(3.18) si ottiene, dopo alcuni passaggi:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = \frac{\mu_\odot}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_v - \frac{3\mu_\odot}{r^3} (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + 2\beta \frac{\mu_\odot}{r^3} \cos \alpha [2 \cos \alpha \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{n}}] (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (3.19)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\boldsymbol{\lambda}_r \quad (3.20)$$

Vela convenzionale con modello di forza ottico

Per questa classe di vela, sostituendo la (3.6) nelle (3.17)–(3.18) e svolgendo le derivate, si ottengono l'espressioni delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = & \frac{\mu_\odot}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_v - \frac{3\mu_\odot}{r^3} (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + \frac{2\hat{\mathbf{r}}}{r^3} (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\lambda}_v) \\ & - \frac{\beta \mu_\odot}{2r^3} [b_1 \mathbf{d}_1 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\lambda}_v) + b_1 \cos \alpha \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_1 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\lambda}_v) (2b_2 \cos \alpha + b_3)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\dot{\lambda}_v = -\lambda_r \quad (3.22)$$

dove si è posto per brevità

$$d_1 \triangleq [\hat{n} - (\hat{r} \cdot \hat{n}) \hat{r}] \quad ; \quad d_2 \triangleq [\lambda_v - (\hat{r} \cdot \lambda_v) \hat{r}] \quad (3.23)$$

Vela convenzionale con modello di forza parametrico

Dalla (3.7) e dalle (3.17)–(3.18) si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_r = & \frac{\mu_\odot}{r^3} \lambda_v - \frac{3\mu_\odot}{r^3} (\lambda_v \cdot \hat{r}) \hat{r} + \frac{2}{r} (\mathbf{a}_p \cdot \lambda_v) \hat{r} - \\ & \frac{\cos \theta_p \beta \mu_\odot (b_1 + b_2 + b_3) (2c_1 \cos^2 \theta_p + c_2)}{r^3} (\hat{\mathbf{a}}_p \cdot \lambda_v) (\hat{\mathbf{a}}_p - \cos \theta_p \hat{r}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\dot{\lambda}_v = -\lambda_r \quad (3.25)$$

Vela composta con modello di forza ideale

Dalla (3.9) e dalle (3.17)–(3.18) si ottiene:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{\mu_\odot}{r^3} \lambda_v - \frac{3\mu_\odot}{r^3} (\lambda_v \cdot \hat{r}) \hat{r} - \frac{\beta \mu_\odot}{r^3} (\lambda_v \cdot \hat{n}_d) [\hat{n}_d - 3 (\hat{r} \cdot \hat{n}_d) \hat{r}] \quad (3.26)$$

$$\dot{\lambda}_v = -\lambda_r \quad (3.27)$$

Vela composta con modello di forza ottico

Dalla (3.11) e dalle (3.17)–(3.18) si ottiene:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{\mu_\odot}{r^3} \lambda_v - \frac{3\mu_\odot}{r^3} (\lambda_v \cdot \hat{r}) \hat{r} - \frac{\beta \mu_\odot}{2r^3} \{ \mathcal{A} [\lambda_v - 3 (\lambda_v \cdot \hat{r}) \hat{r}] + \quad (3.28)$$

$$\mathcal{B} (\lambda_v \cdot \hat{n}_d) [\hat{n}_d - 3 (\hat{n}_d \cdot \hat{r}) \hat{r}] - 2\mathcal{C} (\lambda_v \cdot \hat{n}_d) \hat{r} \}$$

$$\dot{\lambda}_v = -\lambda_r \quad (3.29)$$

3.4 Legge di controllo ottima

In questa sezione viene sintetizzata la legge di controllo ottima, tale cioè da soddisfare il problema di ottimo riassunto nell'equazione (3.16), per le due classi di vela e per i tre modelli di forza sinora considerati.

Al fine di massimizzare globalmente H' verrà imposta la condizione necessaria

$$\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (3.30)$$

e verrà controllata anche la condizione sufficiente (o di convessità) di Legendre-Clebsch

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial \mathbf{u}^2} > 0 \quad (\text{definita positiva}) \quad (3.31)$$

3.4.1 Vela convenzionale

Modello ideale

Tenendo presente le equazioni (3.4)-(3.5), (3.14) e quanto riportato nella sezione §2.7, imponendo la condizione necessaria (3.30) (che si trasforma nelle due equazioni scalari $\partial H'/\partial \alpha = 0$ e $\partial H'/\partial \delta = 0$) si ottiene facilmente, dopo alcuni semplici passaggi algebrici:

$$\tan \alpha = \frac{-3 \cos \alpha_\lambda + \sqrt{9 \cos^2 \alpha_\lambda + 8 \sin^2 \alpha_\lambda}}{4 \sin \alpha_\lambda} \quad (3.32)$$

$$\tan \delta = \tan \delta_\lambda \quad (3.33)$$

Si osservi a tal proposito che l'equazione (3.32), la quale fornisce in forma chiusa l'angolo di cono α ottimo (il valore cioè che massimizza istantaneamente H') in funzione dell'angolo di cono del primer vector α_λ , è congruente con quella ricavata da Sauer^[19] nella metà degli anni '70 e soddisfa la condizione di convessità (3.31).

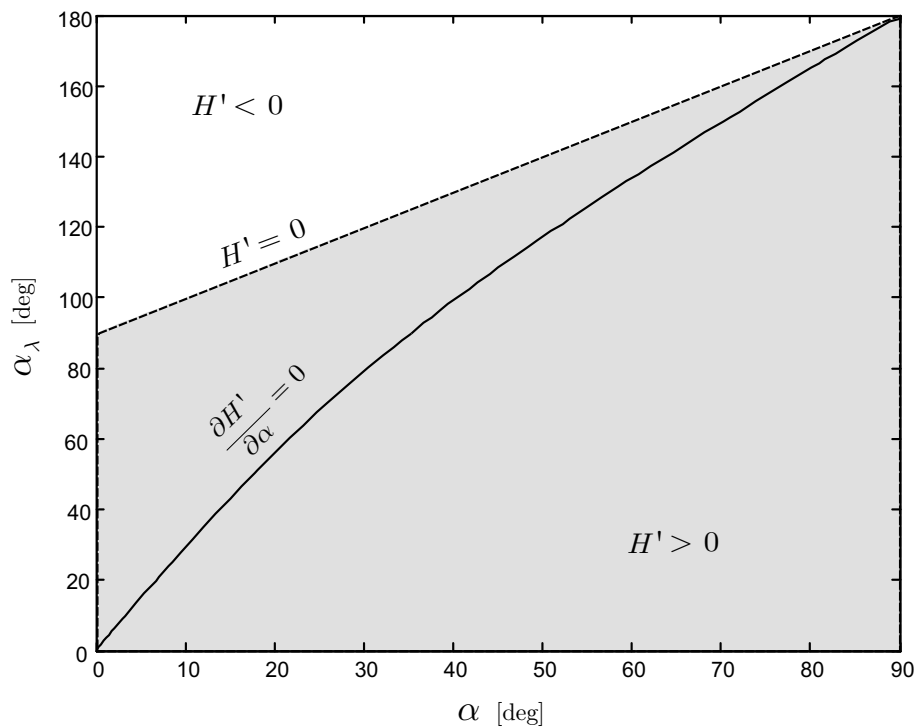


Figura 3.5: Angolo di cono ottimale per vela solare convenzionale con modello di forza ideale ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$).

Il grafico di α in funzione di α_λ è stato riportato in Figura 3.5 dove, tra l'altro, è stato evidenziato sia il luogo dei punti in corrispondenza del quale l'Hamiltoniana ridotta H' si annulla che la regione del piano (α, α_λ) dove $H' > 0$. Infatti è necessario controllare non solo che i punti stazionari dell'Hamiltoniana ridotta siano effettivamente di massimo (e non di minimo) imponendo la condizione di Legendre-Clebsch, ma anche che la funzione H' in quei punti sia positiva. In caso contrario si sceglierebbe come massimo istantaneo di H' un valore negativo, quando sarebbe possibile selezionare un angolo di cono tale da rendere $H' = 0$. Nel caso di vela convenzionale perfettamente riflettente i punti di massimo assoluto dell'Hamiltoniana ridotta in funzione dell'angolo di cono corrispondono sempre ad una funzione H' positiva o al limite nulla per $\alpha = \pi/2$ quando, come si osserva dall'espressione di \mathbf{a} , si annulla la spinta generata dalla vela.

Inoltre, come si osserva dalle Figure 2.3 e 3.4, l'equazione (3.33) che lega l'angolo δ all'angolo δ_λ indica che i versori $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$ appartengono allo stesso piano, come illustrato schematicamente nella Figura 3.6. Questo risultato non deve sorprendere in quanto può

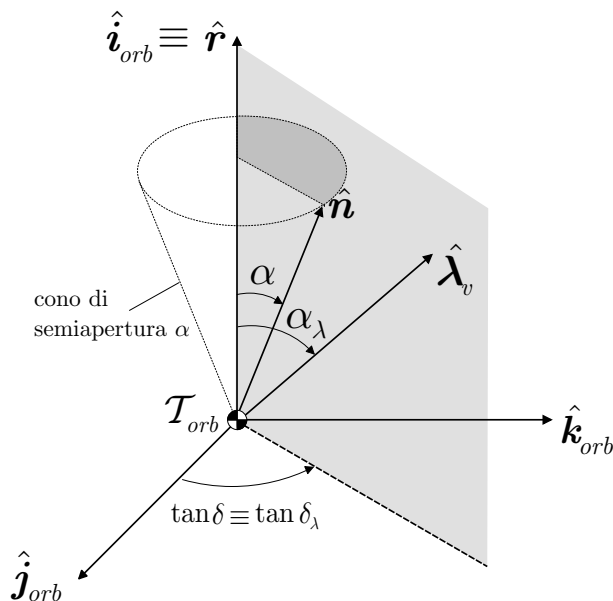


Figura 3.6: Legame il versore normale alla vela e primer vector.

essere facilmente ricavato attraverso semplici considerazioni di carattere geometrico. Infatti massimizzare l'Hamiltoniana ridotta H' corrisponde, in base all'equazione (3.15), a massimizzare la proiezione dell'accelerazione propulsiva (\mathbf{a}) lungo la direzione del primer vector ($\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$). Visto che il modulo dell'accelerazione dipende in sostanza dall'angolo di cono α (che è l'angolo formato dal versore $\hat{\mathbf{n}}$ con il versore $\hat{\mathbf{r}}$), si osserva che il luogo dei punti dello spazio generato dal vettore \mathbf{a} per un fissato valore di α (e quindi di $|\mathbf{a}|$) corrisponde ad un cono avente l'asse coincidente con l'asse x del sistema di riferimento orbitale. Scegliere il valore ottimo di δ corrisponde quindi a scegliere la generatrice del cono in questione che

massimizza la proiezione del vettore accelerazione corrispondente lungo la direzione del primer vector. La generatrice che soddisfa questa condizione è quella che giace nel piano individuato dal versore $\hat{\mathbf{r}}$ (cioè dall'asse x della terna di riferimento orbitale \mathcal{T}_{orb}) e dal versore $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$ (cioè dalla direzione del primer vector).

Visto che i versori $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$ costituiscono una base (in generale non ortonormale) del piano in questione, l'osservazione precedente permette di esprimere $\hat{\mathbf{n}}$ come una combinazione lineare di $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$ nella maniera seguente:

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_\lambda - \alpha)}{\sin \alpha_\lambda} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_\lambda} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_v & \text{per } \alpha_\lambda \in (0, \pi) \\ \hat{\mathbf{r}} & \text{per } \alpha_\lambda = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

dove

$$\cos \alpha_\lambda = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_v \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad \text{e} \quad \sin \alpha_\lambda = \left| \hat{\boldsymbol{\lambda}}_v \times \hat{\mathbf{r}} \right| \quad (3.35)$$

Si osservi, dall'equazione (3.32) che il valore $\alpha_\lambda = \pi$ corrisponde ad un angolo di cono della vela $\alpha = \pi/2$: in questo caso la vela non produce alcuna spinta in quanto posta parallelamente ai raggi solari e quindi $\mathbf{a} = 0$ nelle equazioni del moto.

L'espressione (3.34) risulta molto utile in quanto esprime direttamente il versore normale alla vela, e quindi la direzione dell'accelerazione propulsiva, in funzione del vettore posizione della sonda e del primer vector, due quantità che sono un prodotto diretto dell'integrazione del sistema differenziale finale (cfr. §3.5).

Modello ottico

Sostituendo le equazioni (3.6) e (3.14) nella (3.15) ed imponendo la condizione necessaria (3.30) si perviene, dopo alcuni passaggi algebrici, alle seguenti equazioni dei controlli:

$$\tan \alpha_\lambda = \frac{\sin \alpha (b_1 + 3 b_2 \cos^2 \alpha + 2 b_3 \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha (b_2 \cos \alpha + b_3) - \sin^2 \alpha (2 b_2 \cos \alpha + b_3)} \quad (3.36)$$

$$\tan \delta = \tan \delta_\lambda \quad (3.37)$$

Si osserva subito dalle equazioni precedenti che, nel caso di modello di forza ottico, non esiste più una soluzione in forma chiusa dell'equazione del controllo che fornisce l'angolo di cono ottimo α . Questo vuol dire che l'equazione (3.36) deve essere risolta per via numerica (una volta fissati i coefficienti di forza b_1 , b_2 e b_3 dipendenti dalle caratteristiche ottiche del materiale riflettente), e questo può essere fatto una volta per tutte disegnando la curva $\alpha = \alpha(\alpha_\lambda)$ come è stato fatto nella Figura 3.7.

Come si veda nella Figura 3.7 ed a differenza del modello di forza ideale, nel caso ottico la curva che unisce i punti stazionari di massimo della funzione H' (vale a dire $\partial H'/\partial \alpha = 0$) interseca la curva dove H' si annulla ($H' = 0$) in un punto $P_o(\alpha_o^*, \alpha_{\lambda_o}^*)$

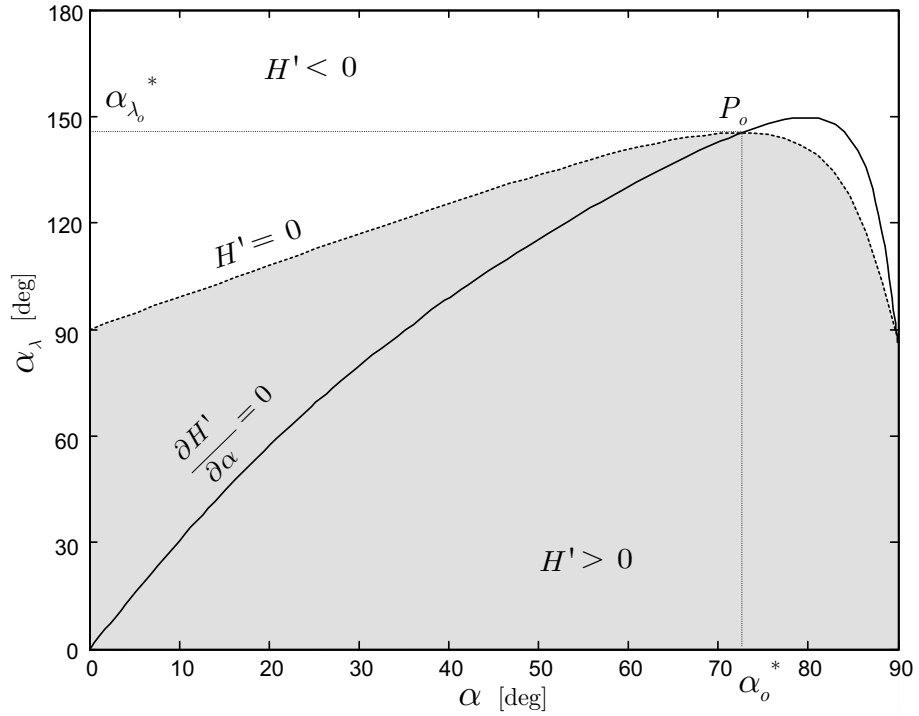


Figura 3.7: Angolo di cono ottimale per vela solare convenzionale con modello di forza ottico ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$). I coefficienti di forza sono quelli relativi alla JPL *Square Sail* (cfr. Tabella 2.1)

interno all'intervallo di variazione ammissibile dell'angolo di cono della vela dove

$$\cos \alpha_o^* = \frac{-b_1 b_3 - 2 b_2 b_3 + \sqrt{b_1^2 b_3^2 - 4 b_1 b_3^2 b_2 + 8 b_1^2 b_2^2 + 4 b_2^3 b_1}}{4 b_1 b_2 + 2 b_2^2} \quad (3.38)$$

$$\tan \alpha_{\lambda_o}^* = -\frac{b_1 + \cos \alpha_o^* (b_2 \cos \alpha_o^* + b_3)}{\sin \alpha_o^* (b_2 \cos \alpha_o^* + b_3)} \quad (3.39)$$

Questo implica che, per $\alpha_\lambda > \alpha_{\lambda_o}^*$, la curva $\partial H'/\partial \alpha = 0$ corrisponde a dei valori negativi dell'Hamiltoniana ridotta. Poiché nell'intervallo $[\alpha_{\lambda_o}^*, \pi]$ è possibile scegliere un valore di angolo di cono $\alpha = \pi/2$ (tale cioè da annullare la funzione H'), la legge di controllo ottima riguardante l'angolo di cono sarà quindi la seguente:

$$\alpha = \begin{cases} \text{soluzione della (3.36)} & \text{per } \alpha_\lambda \in [0, \alpha_{\lambda_o}^*) \\ \pi/2 & \text{per } \alpha_\lambda \in [\alpha_{\lambda_o}^*, \pi] \end{cases} \quad (3.40)$$

Dall'equazione (3.37) si ricava che l'angolo di azimuth ottimo è tale da rendere i vettori \hat{r} , \hat{n} e $\hat{\lambda}_v$ appartenenti allo stesso piano, come già evidenziato nel modello di forza ideale. Valgono quindi tutte le considerazioni di carattere geometrico fatte in §3.4.1, mentre

l'espressione riguardante il versore normale alla vela $\hat{\mathbf{n}}$ diventa:

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_\lambda - \alpha)}{\sin \alpha_\lambda} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_\lambda} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_v & \text{per } \alpha_\lambda \in (0, \alpha_{\lambda_o}^*) \\ \hat{\mathbf{r}} & \text{per } \alpha_\lambda = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Per $\alpha_\lambda \in [\alpha_{\lambda_o}^*, \pi]$ la vela non produce alcuna spinta in quanto l'angolo di cono è stato posto pari a $\pi/2$ e quindi il termine contenente l'accelerazione \mathbf{a} nelle equazioni del moto si annulla.

Modello parametrico

Sostituendo le equazioni (3.7) e (3.14) nella (3.15) ed imponendo la condizione necessaria (3.30) (che si trasforma in due equazioni scalari $\partial H'/\partial \theta_p = 0$ e $\partial H'/\partial \delta_p = 0$) si ottengono le seguenti equazioni dei controlli:

$$\tan(\alpha_\lambda - \theta_p) = \frac{2 \sin \theta_p \cos \theta_p (2 c_1 \cos^2 \theta_p + c_2)}{c_1 \cos^4 \theta_p + c_2 \cos^2 \theta_p + c_3} \quad (3.42)$$

$$\tan \delta_p = \tan \delta_\lambda \quad (3.43)$$

Come nel caso precedente relativo al modello di forza ottico, nel modello di forza parametrico non esiste una soluzione analitica all'equazione del controllo che fornisce l'angolo di cono della vela θ_p in funzione dell'angolo di cono del primer vector α_λ . Quindi l'equazione (3.42) deve essere risolta per via numerica. La curva che esprime $\theta_p = \theta_p(\alpha_\lambda)$, soluzione della (3.42) e relativa a punti stazionari di massimo dell'Hamiltoniana ridotta è stata riportata nella Figura 3.8. Come si osserva dalla Figura 3.8 la funzione $\theta_p = \theta_p(\alpha_\lambda)$ soluzione della (3.42) fornisce dei valori sempre positivi di H' nell'intervallo di variazione ammissibile dell'angolo di cono della spinta, ovvero per $\theta \in [0, \theta_p^*)$. L'Hamiltoniana ridotta si annulla solo quando $\theta_p = \theta_p^*$.

Osservando che la funzione H' è non-negativa quando

$$H' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_\lambda \leq \theta_p + \frac{\pi}{2} \quad (3.44)$$

si ottiene la seguente legge di controllo dell'angolo di cono della spinta:

$$\theta_p = \begin{cases} \text{soluzione della (3.42)} & \text{per } \alpha_\lambda \in [0, \theta_p^* + \pi/2) \\ \theta_p^* & \text{per } \alpha_\lambda \in [\theta_p^* + \pi/2, \pi] \end{cases} \quad (3.45)$$

In base alla (3.43), nel modello di forza parametrico i versori $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$ e $\hat{\mathbf{a}}_p$ appartengono allo stesso piano. In questo modo è possibile esprimere il versore della spinta propulsiva come

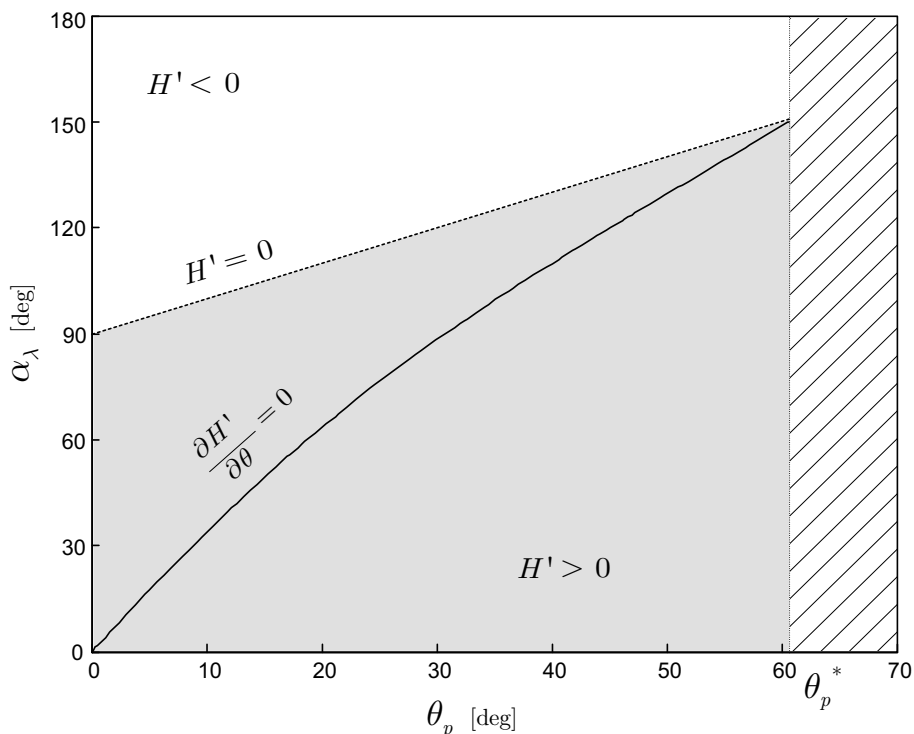


Figura 3.8: Angolo di cono ottimale per vela solare convenzionale con modello di forza parametrico ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$). I coefficienti di forza sono quelli relativi alla JPL *Square Sail* (cfr. Tabella 2.1)

una combinazione lineare degli altri due nella maniera seguente:

$$\hat{\mathbf{a}}_p = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_\lambda - \theta_p)}{\sin \alpha_\lambda} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin \theta_p}{\sin \alpha_\lambda} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_v & \text{per } \alpha_\lambda \in (0, \theta_p^* + \pi/2) \\ \hat{\mathbf{r}} & \text{per } \alpha_\lambda = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

Quando $\alpha_\lambda \in [\theta_p^* + \pi/2, \pi]$ la vela non produce alcuna spinta, come già puntualizzato, e quindi non è necessario calcolare il versore $\hat{\mathbf{a}}_p$.

3.4.2 Vela composta

Modello ideale

Ricordando il modello di spinta riassunto nella sezione §3.2.2 e sostituendo l'equazione (3.9) nell'espressione di H' data dall'equazione (3.15) ed imponendo la condizione necessaria

(3.30) si ottiene:

$$\alpha = \frac{\alpha_\lambda}{2} \tag{3.47}$$

$$\tan \delta = \tan \delta_\lambda \tag{3.48}$$

L'equazione (3.47) è straordinariamente semplice ed indica il fatto che il versore normale al direttore (che nel caso di modello di forza ideale coincide con il versore della spinta generata dalla vela SPT) corrisponde alla bisettrice dell'angolo α_λ formato dalla direzione del primer vector con l'asse x del sistema di riferimento orbitale. Infatti i tre vettori in questione sono complanari, come si deduce facilmente dall'equazione (3.48).

Il risultato relativo all'equazione (3.47) può essere anche ricavato utilizzando delle semplici considerazioni di carattere geometrico. Innanzitutto si osservi che, in base all'equazione (3.48), la punta del vettore dell'accelerazione normalizzata della vela $\tilde{\mathbf{a}}$, definita nella (3.10), è vincolato a muoversi su di una circonferenza di raggio pari ad $1/2$ (cfr. Figura 3.9). Infatti questa circonferenza è data dall'intersezione della sfera di esistenza di $\tilde{\mathbf{a}}$ (cfr. Figura 3.3) con il piano individuato dai tre versori $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$ e $\hat{\mathbf{n}}_d$ (quest'ultimo parallelo a $\tilde{\mathbf{a}}$ per la (3.10)). Una volta fissata la direzione del primer vector $\boldsymbol{\lambda}_v$, il valore ottimo dell'accelerazione propulsiva \mathbf{a} (e quindi del suo corrispettivo normalizzato $\tilde{\mathbf{a}}$) si determina tracciando la retta perpendicolare alla direzione del primer vector che risulta allo stesso tempo tangente alla circonferenza di esistenza di $\tilde{\mathbf{a}}$. Dai triangoli ottenuti si deduce poi facilmente che l'angolo α ottimo è proprio la metà dell'angolo di cono del primer vector α_λ . Quindi la direzione della spinta coincide con la bisettrice dell'angolo α_λ .

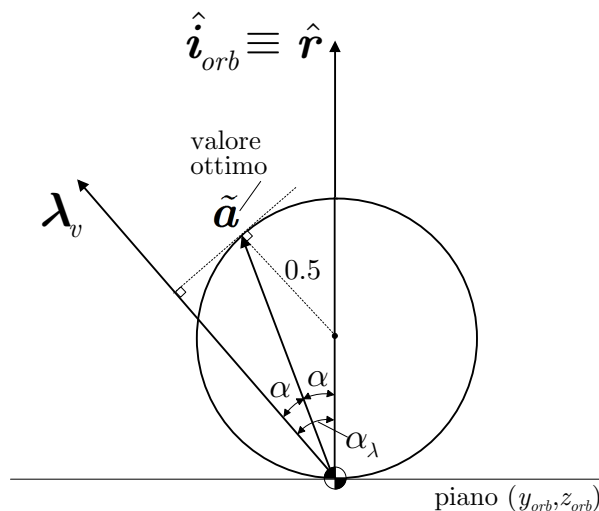


Figura 3.9: Interpretazione geometrica dell'equazione che fornisce l'angolo di cono ottimale nel caso di vela composta con modello di forza ideale.

Come già fatto nel caso di vela convenzionale anche per la vela composta con modello di

forza ideale si esprime il versore normale allo specchio direttore, coincidente con il versore della spinta, come una combinazione lineare di $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$:

$$\hat{\mathbf{n}}_d = \frac{\hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\lambda}}_v}{\sqrt{2(1 + \cos \alpha_\lambda)}} \quad \text{per } \alpha_\lambda \in [0, \pi) \quad (3.49)$$

Quando $\alpha_\lambda = \pi$, in base all'equazione (3.47), l'angolo di cono del direttore viene posto pari a $\pi/2$: la vela non produce così nessuna spinta e non esiste più la necessità di determinare la direzione di $\hat{\mathbf{n}}_d$.

Modello ottico

In questo caso l'Hamiltoniana ridotta ha una espressione leggermente differente da quella indicata nell'equazione (3.15) in quanto l'accelerazione propulsiva del modello di forza ottico contiene un termine non dipendente dall'angolo di controllo α , vale a dire il termine in cui compare il coefficiente di forza \mathcal{A} :

$$H' = \frac{\beta \mu_\odot}{2r^2} [\mathcal{B} (\hat{\mathbf{n}}_d \cdot \hat{\mathbf{r}}) + \mathcal{C}] (\hat{\mathbf{n}}_d \cdot \boldsymbol{\lambda}_v) \quad (3.50)$$

Sostituendo le (2.38) e (3.14) nell'equazione precedente si ricavano i valori dell'angolo di cono del direttore α che rendono l'Hamiltoniana ridotta non-negativa:

$$H' \geq 0 \Rightarrow [\alpha \geq \alpha_\lambda - \pi/2 \cap \alpha \leq \arccos(-\mathcal{C}/\mathcal{B})] \cup [\alpha \leq \alpha_\lambda - \pi/2 \cap \alpha \geq \arccos(-\mathcal{C}/\mathcal{B})] \quad (3.51)$$

Tenendo presente l'equazione (3.50) ed imponendo la condizione necessaria (3.30) si ottengono le seguenti equazioni dei controlli:

$$\alpha_\lambda = \alpha + \arctan\left(\frac{\mathcal{B} \sin \alpha}{\mathcal{B} \cos \alpha + \mathcal{C}}\right) \quad (3.52)$$

$$\tan \delta = \tan \delta_\lambda \quad (3.53)$$

L'equazione (3.52), implicita nell'incognita α , è una estensione della (3.47) in quanto nel caso ideale di riflessione speculare completa $\mathcal{C} = 0$. Utilizzando la (3.51) è possibile verificare come le coppie di valori (α, α_λ) soluzioni della (3.52) corrispondano a dei valori di H' sempre positivi (si veda la Figura 3.10), o al limite nulli per un valore dell'angolo di cono

$$\alpha = \arccos(-\mathcal{C}/\mathcal{B})$$

Si osservi nella Figura 3.11 come la legge di controllo relativa all'angolo di cono α fornisca effettivamente dei massimi assoluti per quel che riguarda l'Hamiltoniana ridotta H'

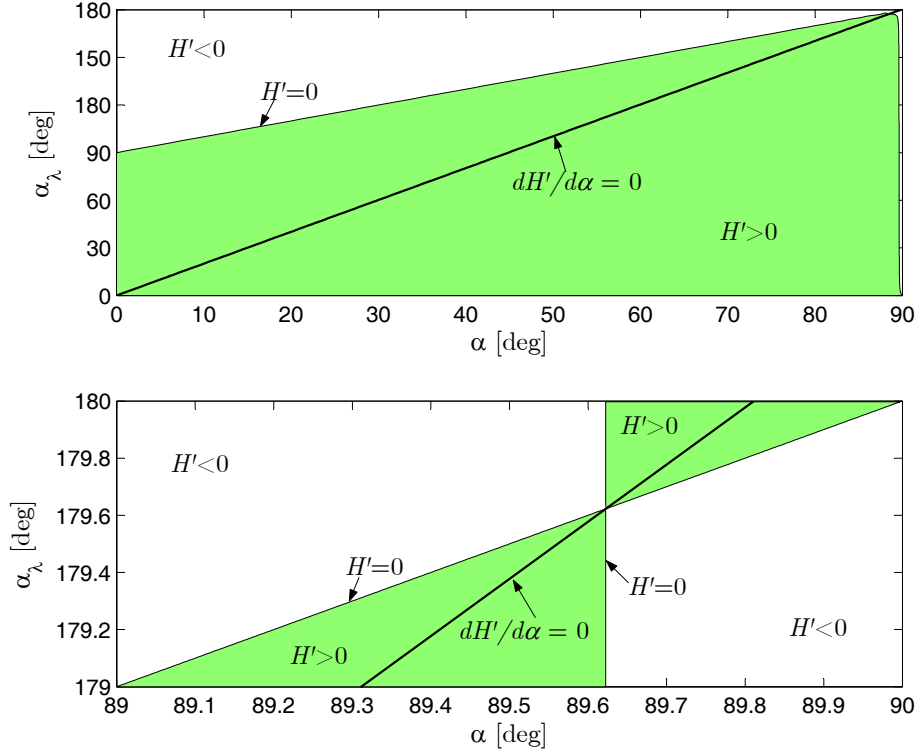


Figura 3.10: Angolo di cono del direttore ottimale per vela solare composta con modello di forza ottico ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$). I coefficienti di forza sono quelli riportati nella Tabella 2.3.

soddisfacendo in questo modo la condizione di convessità (3.31).

Inoltre, anche in questo modello di forza, i tre vettori \hat{r} , \hat{n}_d e $\hat{\lambda}_v$ sono complanari come indica l'equazione (3.53) e questo permette di esprimere, come già fatto precedentemente, il versore normale \hat{n}_d nella maniera seguente:

$$\hat{n}_d = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_\lambda - \alpha)}{\sin \alpha_\lambda} \hat{r} + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_\lambda} \hat{\lambda}_v & \text{per } \alpha_\lambda \in (0, \pi) \\ \hat{r} & \text{per } \alpha_\lambda = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

Risulta interessante osservare che nel caso in cui $\alpha_\lambda = \pi$ il versore \hat{n}_d non è definito in quanto i vettori \hat{r} e $\hat{\lambda}_v$ hanno la stessa direzione. Rispetto ai casi precedenti infatti per $\alpha_\lambda = \pi$ l'angolo di cono ottimo α è diverso da $\pi/2$ e raggiunge il suo valore massimo α_{\max} (questo valore è numericamente molto vicino¹ a $\pi/2$ essendo $\alpha_{\max} \approx 89.6$ deg) come si osserva nella Figura 3.10. Questo vuol dire geometricamente che non è possibile individuare univocamente l'angolo di azimut del versore \hat{n}_d in quanto i vettori \hat{r} e $\hat{\lambda}_v$ non determinano un unico piano, ma un fascio di piani attorno alla direzione dell'asse del

¹nel caso in cui il materiale riflettente sia un doppio strato di Alluminio-Kapton

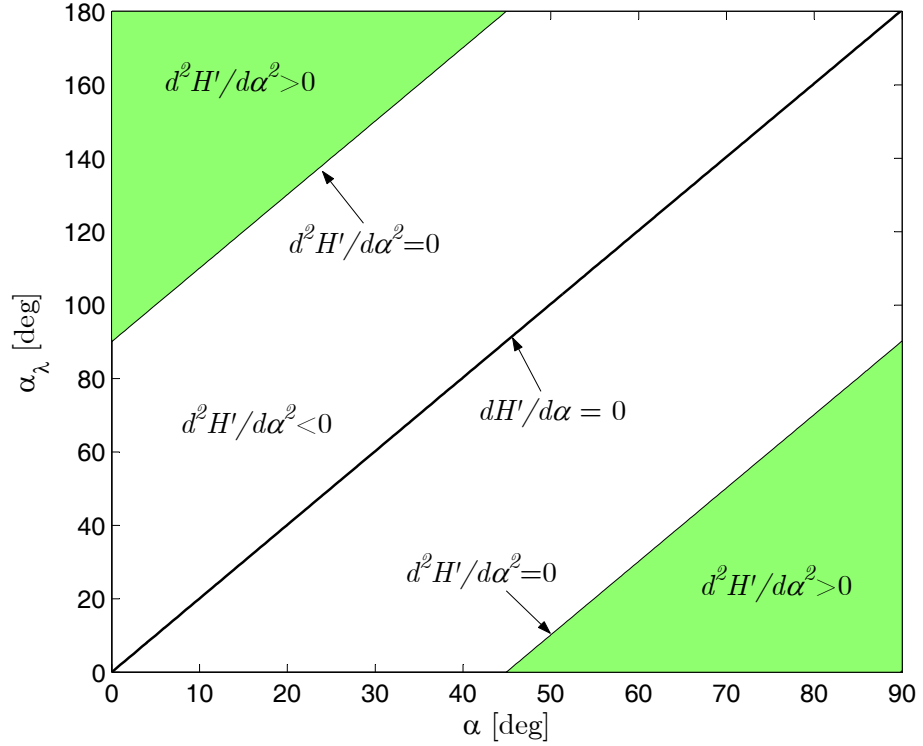


Figura 3.11: Controllo sulla condizione di convessità per la legge di controllo (3.52) riguardante l'angolo di cono del direttore ottimale per vela solare composta con modello di forza ottico ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$). I coefficienti di forza sono quelli riportati nella Tabella 2.3.

collettore. In questa maniera \hat{n}_d appartiene ad un cono di semiapertura pari ad α_{\max} ed asse coincidente con quello del collettore.

Tuttavia tenendo in conto i vincoli reali sul massimo valore ammissibile di α ed osservando che (cfr. Tabella 2.3):

$$\frac{\mathcal{B}' \cos(\alpha_{\max})}{\mathcal{A}'} \approx 0.0094 \ll 1 \quad (3.55)$$

$$\frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{A}'} \approx -0.0178 \ll 1 \quad (3.56)$$

l'accelerazione generata dalla vela si può approssimare in base alla (3.11) nella maniera seguente:

$$\mathbf{a}_o(\alpha_\lambda = \pi) = \frac{\beta \mu_\odot}{2r^2} \mathcal{A}' \left[\hat{\mathbf{r}} + \underbrace{\left(\frac{\mathcal{B}' \cos(\alpha_{\max})}{\mathcal{A}'} + \frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{A}'} \right)}_{-0.0084} \hat{\mathbf{n}}_d \right] \simeq \frac{\beta \mu_\odot}{2r^2} \mathcal{A}' \hat{\mathbf{r}} \quad (3.57)$$

rimuovendo in questo modo l'indecisione sulla scelta di $\hat{\mathbf{n}}_d$ poiché ora l'accelerazione risulta esclusivamente diretta lungo $\hat{\mathbf{r}}$.

Infine si osserva come la legge di controllo (3.52) nel caso ottico (con i coefficienti di forza riportati nella Tabella 2.3) sia molto vicina numericamente a quella calcolata nel caso ideale e riportata nell'equazione (3.47). Questa somiglianza è legata matematicamente al fatto che $C'/B' \approx -0.0066 \ll 1$. Infatti nel caso limite in cui $C'/B' = 0$ si ottiene nuovamente la legge di controllo (3.47) determinata nel caso ideale.

3.5 Il problema differenziale

Il problema differenziale per la generica vela è costituito da:

- le sei equazioni scalari del moto (3.1)-(3.2);
- le sei equazioni scalari di Eulero-Lagrange (3.17)-(3.18)

Il sistema differenziale finale è quindi costituito da 12 equazioni differenziali scalari del primo ordine non lineari nelle variabili $r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z, \lambda_{r_x}, \lambda_{r_y}, \lambda_{r_z}, \lambda_{v_x}, \lambda_{v_y}$ e λ_{v_z} . Al fine di ridurre la sensibilità numerica del problema differenziale, tutte le variabili in gioco possono essere adimensionalizzate utilizzando un insieme di unità canoniche^[28] così definite:

$$DU_{\odot} \triangleq 1 \text{ AU} \quad ; \quad TU_{\odot} \triangleq \sqrt{\frac{\text{AU}^3}{\mu_{\odot}}} = 58.132440906 \text{ giorni solari} \quad (3.58)$$

Il problema deve essere poi completato da 12 opportune condizioni al bordo legate al problema di *rendez-vous* da studiare. In particolare:

- conoscendo la posizione e la velocità iniziale (istante $t_0 = 0$) della vela solare vengono fissate 6 condizioni al bordo (in questo caso condizioni iniziali)

$$[\mathbf{r}_0] \triangleq [r_{x_0}, r_{y_0}, r_{z_0}]^T \quad \text{e} \quad [\mathbf{v}_0] \triangleq [v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}]^T \quad (3.59)$$

- conoscendo la posizione e la velocità finale (istante t_f) della vela solare vengono fissate altre 6 condizioni al bordo

$$[\mathbf{r}_f] \triangleq [r_{x_f}, r_{y_f}, r_{z_f}]^T \quad \text{e} \quad [\mathbf{v}_f] \triangleq [v_{x_f}, v_{y_f}, v_{z_f}]^T \quad (3.60)$$

Visto che si tratta di un problema a “tempo aperto”, vale a dire un problema di ottimo in cui l'indice da ottimizzare è l'intervallo di tempo necessario al sistema per raggiungere uno stato desiderato (cfr. §3.3), è necessario imporre una ulteriore condizione al fine di determinare il valore di t_f . Questo vincolo è costituito dalla condizione di trasversalità che per il problema di *rendez-vous* considerato assume al forma seguente^[25;19]:

$$H(t_f) = 1 + \boldsymbol{\lambda}_r(t_f) \cdot \mathbf{v}_f - \frac{\mu_{\odot}}{r_f^3} \boldsymbol{\lambda}_v(t_f) \cdot \mathbf{r}_f \quad (3.61)$$

Infatti lo stato finale della vela solare è legato alla posizione e velocità del pianeta di arrivo, che possono essere ricavati da un calcolo di effemeridi planetarie^[29]. Quindi

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}^{(p)}(t_f), \quad \mathbf{v}_f = \mathbf{v}^{(p)}(t_f) \quad (3.62)$$

dove $\mathbf{r}^{(p)}$ e $\mathbf{v}^{(p)}$ corrispondono alla posizione ed alla velocità nel sistema inerziale \mathcal{T}_\odot del pianeta di arrivo. Osservando che $\dot{\mathbf{r}}^{(p)}(t_f) = \mathbf{v}_f$ e $\dot{\mathbf{v}}^{(p)}(t_f) = -\mu_\odot \mathbf{r}_f / r_f^3$ si ricava la condizione di trasversalità scritta nell'equazione (3.61).

3.6 Il problema dei due punti

Come è stato osservato nel paragrafo precedente, il problema di ottimo posto in forma variazionale è stato trasformato in un problema differenziale ai valori al bordo. Visto che le condizioni al bordo sono miste, nel senso che sono fissate sia all'istante iniziale che all'istante finale, il problema differenziale prende il nome di *problema dei due punti* (TPBVP, *Two Point Boundary Value Problem*). Il problema dei due punti può essere risolto numericamente cercando le condizioni iniziali incognite (ovvero il valore all'istante t_0 delle variabili aggiunte) in maniera tale da soddisfare le condizioni finali (posizione e velocità) desiderate.

In realtà il problema è, in questo caso particolare, ancora più complesso in quanto il tempo finale non è un dato del problema e quindi non è noto a priori nel processo di integrazione numerica. Infatti, come osservato da Bryson^[27], risolvere un problema di ottimo attraverso un metodo indiretto quando l'istante finale non è specificato corrisponde a risolvere una serie di problemi a tempo determinato in cui vengono soddisfatte le condizioni al bordo desiderate, per poi selezionare tra questi quello che soddisfa *anche* la condizione di trasversalità imposta.

3.6.1 Algoritmo di soluzione

La procedura utilizzata per risolvere il problema è sintetizzata nell'algoritmo seguente:

1. Si sceglie un valore di primo tentativo del tempo di missione t_f ;
2. Si tiene fisso il tempo di missione e si determinano i valori iniziali delle 6 variabili aggiunte in maniera tale da soddisfare le 6 condizioni scalari finali desiderate \mathbf{r}_f e \mathbf{v}_f . A tale scopo si procede nella maniera seguente:
 - (a) Si scelgono i valori iniziali incogniti di primo tentativo delle variabili aggiunte $\boldsymbol{\lambda}_r(t_0)$ e $\boldsymbol{\lambda}_v(t_0)$;
 - (b) Si integra il sistema differenziale (cfr. §3.5) attraverso uno schema numerico dopo aver fissato le tolleranze d'integrazione;

- (c) Si calcolano all'istante finale la posizione $\tilde{\mathbf{r}}_f$ e la velocità $\tilde{\mathbf{v}}_f$ della vela solare e le si confronta con i valori desiderati $\mathbf{r}^{(p)}(t_f)$ e $\mathbf{v}^{(p)}(t_f)$, quelli cioè legati alla posizione del pianeta di arrivo all'istante (noto in questo passo dell'algoritmo) finale t_f . Se il vettore degli errori (adimensionalizzato mediante il sistema di unità canoniche definito nella (3.58))

$$[\mathbf{e}] \triangleq \left[\left(\mathbf{r}^{(p)}(t_f) - \tilde{\mathbf{r}}_f \right)^T, \left(\mathbf{v}^{(p)}(t_f) - \tilde{\mathbf{v}}_f \right)^T \right]^T$$

ha una norma $\|\mathbf{e}\| \leq \bar{\epsilon}$ minore di un valore $\bar{\epsilon}$ preventivamente fissato, il problema dei due punti è risolto. In caso contrario si deve ritornare al punto (b) variando opportunamente, attraverso un metodo numerico, i valori iniziali delle variabili aggiunte incognite.

3. Si calcola il valore finale della funzione Hamiltoniana $H(t_f)$ e si controlla se la condizione di trasversalità (3.61) risulta soddisfatta: in caso affermativo la traiettoria calcolata è ottima (nel senso che minimizza t_f) per il problema di *rendez-vous* in esame, in caso contrario occorre ripetere i punti 2 e 3 modificando il valore del tempo di missione.

La variazione dei valori iniziali delle variabili aggiunte al punto 2.c e del tempo finale al punto 3 può essere effettuata utilizzando ad esempio un metodo numerico misto, che fa uso sia di una tecnica gradientale come quella di Newton-Rhaphson^[30] sia di una tecnica diretta come quella del simplesso^[31] o di Nelder-Mead. Una tale procedura si rende necessaria in quanto il problema è fortemente non lineare e talvolta la ricerca delle variabili aggiunte iniziali incognite con un metodo puramente gradientale potrebbe convergere ad un insieme di valori che non soddisfa le condizioni finali desiderate.

Al fine di ridurre i tempi di calcolo legati alla soluzione del problema dei due punti, è necessario fornire al punto 1 una stima ragionevole (e sufficientemente vicina ai valori che risolvono il problema) delle variabili incognite. A tale scopo può essere utilizzato un metodo di ricerca basato sugli algoritmi genetici^[32] che individua, con una certa tolleranza, la regione di esistenza della soluzione nello spazio a 7 dimensioni delle variabili incognite.

L'integrazione numerica del problema differenziale al punto 2.b viene effettuata con un metodo di Runge-Kutta del quinto ordine a passo variabile^[33;34] utilizzando una tolleranza assoluta e relativa di 10^{-12} .

3.7 Simulazioni ed analisi dei risultati

La legge di controllo ottima ricavate nelle sezioni precedenti è stata applicata allo studio di traiettorie di minimo tempo per una vela solare convenzionale e composta utilizzando i

modelli di forza sonora descritti ed ottenendo dei confronti, dove possibile, con i risultati già presenti in letteratura.

3.7.1 Vela convenzionale

Per quel che riguarda la vela solare convenzionale, sono state simulate delle traiettorie di trasferimento verso Marte assumendo un valore del parametro di snellezza della vela $\beta = 0.1175$, che corrisponde ad un'accelerazione caratteristica nel caso ideale di 0.7 mm/s^2 . La vela solare possiede inizialmente un'orbita coincidente con l'orbita eliocentrica della Terra: questo corrisponde a considerare delle traiettorie di fuga dal nostro pianeta aventi un eccesso iperbolico nullo. Per questo motivo le traiettorie di trasferimento così calcolate possono essere pensate come la fase successiva alla fuga dalla Terra studiata, per quel particolare valore del parametro β , in un recente articolo^[35] da Coverstone e Prussing per una vela perfettamente riflettente (cioè con modello di forza ideale).

Sono state simulate diverse traiettorie nell'intervallo temporale che comprende il periodo settembre 2015 – febbraio 2016 assumendo una tolleranza di soddisfacimento delle condizioni finali migliore di 10^{-10} . I risultati ottenuti sono riportati nella Figura 3.12, per quel che riguarda i tempi minimi di missione in funzione della data di partenza (espressa in forma di Data Giuliana Modificata, MJD). Le simulazioni rivelano che la vela solare

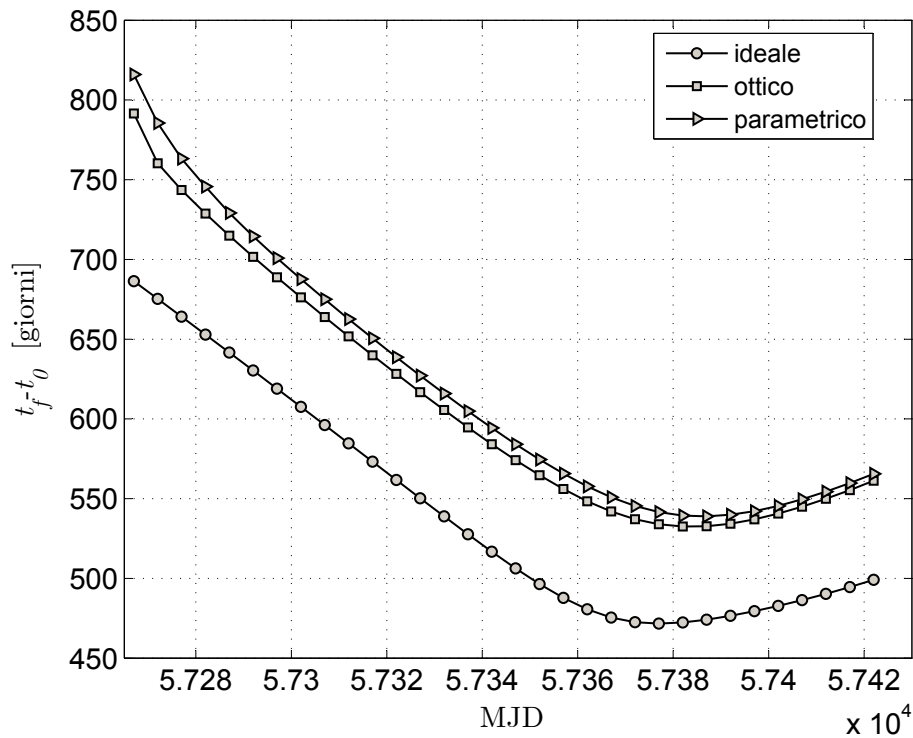


Figura 3.12: Tempo di missione per un *rendez-vous* con Marte per una vela convenzionale con i tre modelli forza ideale, ottico e parametrico.

con modello non ideale richiede un incremento di tempo non trascurabile rispetto ai tempi di volo caratteristici nel caso di vela perfettamente riflettente. L'incremento è dell'ordine del 12 – 13% per il modello di forza ottico e del 14 – 15% per il modello di forza parametrico. Questi risultati sono in accordo con quelli ricavati recentemente da Dachwald^[36] utilizzando una tecnica di ottimizzazione basata sull'uso di reti neurali. Inoltre il tempo minimo di trasferimento (470 giorni) per la vela ideale è in eccellente accordo con il risultato trovato da Sauer^[19]. Si osservi a tal proposito che i tempi minimi per i modelli ottico e parametrico (pari rispettivamente a 532 e 539 giorni rispettivamente) sono ottenuti con una data di partenza molto vicina alla data ottima di lancio del caso ideale (21 dicembre 2015).

La corrispondente storia temporale degli angoli di controllo è stata riportata nella Figura 3.13 dove si osserva, tra l'altro, come vengano soddisfatti i vincoli sulla regione di esistenza degli angoli di controllo (cfr. §2.7). Nel caso presentato le simulazioni non indicano la presenza di fasi con volo per inerzia (archi di *coasting*), anche se la legge di controllo proposta, nel caso di modello di forza ottico e parametrico li può prevedere. Risulta interessante osservare che la storia temporale degli angoli di controllo sia molto vicina a quella individuata da Colasurdo e Casalino^[24] assumendo un trasferimento perfettamente complanare tra due orbite (quella terrestre e quella marziana) supposte in prima approssimazione circolari. La ragione di questa somiglianza può essere ricercata nella piccola eccentricità dell'orbita di partenza terrestre ($e = e_{\oplus} = 0.01671022$) e di arrivo marziana ($e = e_{\odot} = 0.09341233$) e nella loro sostanziale complanarità visto che l'orbita marziana è inclinata sull'eclittica di appena 1.85° (alla data 1/1/2000).

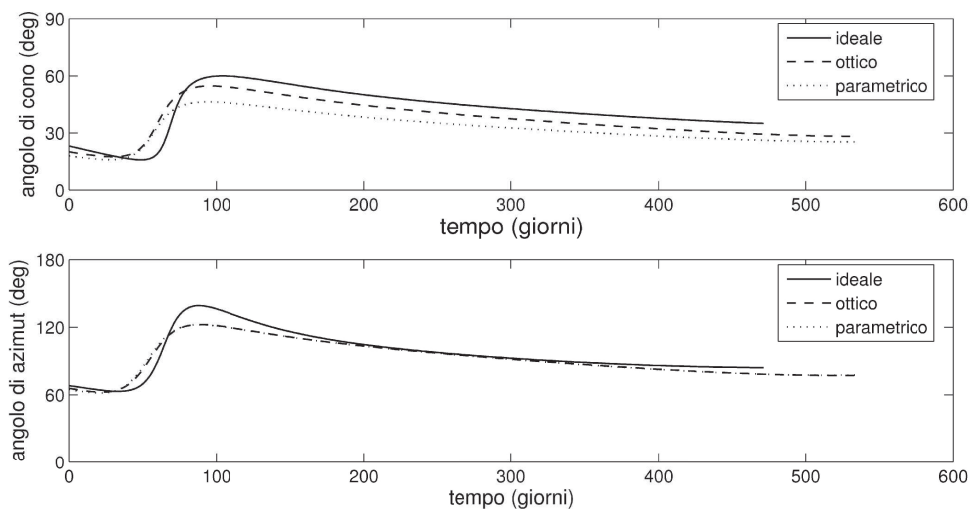


Figura 3.13: Angoli di controllo della vela convenzionale per una traiettoria di *rendez-vous* con Marte con partenza dalla Terra il 21 dicembre 2015).

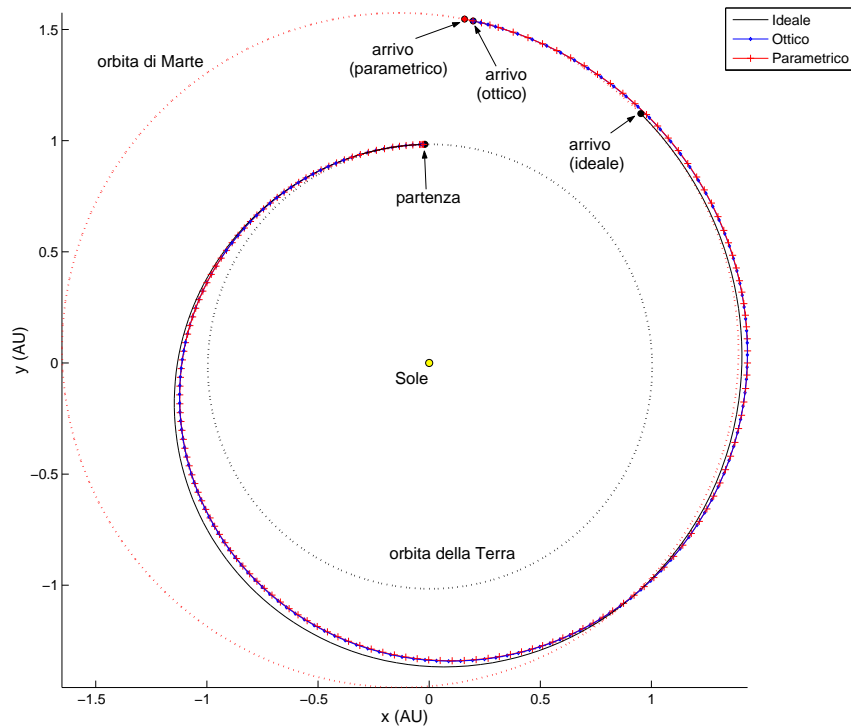


Figura 3.14: Proiezione sul piano dell'eclittica della traiettoria di *rendez-vous* con Marte con partenza dalla Terra il 21 dicembre 2015.

3.7.2 Vela composta

La legge di controllo ottima discussa nella sezione §3.4.2 è stata applicata nella simulazione di traiettorie di *rendez-vous* di minimo tempo sia verso Marte che verso Venere. È stata considerata una vela composta in cui è stato utilizzato lo stesso materiale riflettente per tutti e tre i componenti principali (collettore, riflettore e direttore). I coefficienti di forza \mathcal{A}' , \mathcal{B}' e \mathcal{C}' utilizzati nelle simulazioni sono quelli riportati nella Tabella 2.3.

L'analisi in questo caso è stata condotta in due fasi:

Fase 1 sono state innanzitutto studiate le traiettorie di minimo tempo utilizzando una formulazione bidimensionale e considerando le orbite dei pianeti coinvolti perfettamente circolari. Questo studio può essere affrontato senza ricalcolare la legge di controllo ottimale osservando che quella ricavata nel caso tridimensionale (cfr. §3.4.2) può essere utilizzata con successo anche in trasferimenti piani in quanto, per la (3.49) (caso ideale) e per la (3.54) (caso ottico), il versore $\hat{\mathbf{n}}_d$ è vincolato a giacere nel piano individuato dai versori $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v$ che coincide appunto con il piano dell'orbita nel modello bidimensionale.

La formulazione variazionale ed il corrispondente problema differenziale è formalmente simile a quello riportato nella sezione §5.3.3 e relativo al raggiungimento della condizione di eliostazionarietà attraverso una vela solare in un trasferimento bidimensionale. La differenza fondamentale tra il caso in esame e quello riportato nella sezione §5.3.3 risiede nelle condizioni al bordo che in un problema di *rendez-vous* sono legate ovviamente alla posizione e velocità finale del pianeta da raggiungere. Utilizzando la stessa notazione di §5.3.4 si ha, adottando un sistema di unità canoniche (cfr. §3.5), all'istante iniziale $t_0 = 0$:

$$r_0 = 1 ; \quad u_0 = 0 ; \quad v_0 = 1 ; \quad \theta_0 = 0 \quad (3.63)$$

Se non si vincola il valore finale θ_f dell'anomalia finale (ottimizzando quindi anche la posizione finale della sonda sull'orbita del pianeta di arrivo), si ottengono le seguenti condizioni all'istante finale t_f :

$$u_f = 0 ; \quad v_f = 1/\sqrt{r_f^{(p)}} ; \quad r_f = r_f^{(p)} ; \quad \lambda_\theta(t_f) = 0 \quad (3.64)$$

dove $r_f^{(p)}$ indica il raggio dell'orbita circolare del pianeta da raggiungere.²

In particolare nel caso bidimensionale è stata studiata la sensibilità del tempo minimo di trasferimento al variare del parametro di snellezza della vela β . A scopo comparativo l'analisi è stata estesa anche al caso di vela convenzionale con modello di forza ideale ed ottico (in quest'ultimo sono stati considerati i coefficienti di forza riportati nella Tabella 2.1). I risultati delle simulazioni sono stati riportati nella Figura 3.15 per quel che riguarda i trasferimenti verso Marte e nella Figura 3.16 per i trasferimenti verso Venere. Dalle Figure in questione si osserva che i tempi di trasferimento per una vela composta con modello di forza ottico, per ogni valore di β considerato, sono maggiori non solo di quelli relativi alla stessa classe di vela con modello ideale (come d'altro canto atteso) ma addirittura anche dei tempi relativi ad una semplice vela convenzionale con modello di forza ottico. I tempi minimi di trasferimento, per ogni valore di β considerato, competono invece alla vela composta con modello di forza ideale: questo risultato è facilmente spiegabile ricordando che entrambe le vele ideali convenzionali e composte hanno, a parità di β , la stessa accelerazione caratteristica (cfr. Figura 2.29) ma la vela composta ha un modulo della spinta che varia come il coseno dell'angolo di cono α , mentre per quella convenzionale la variazione è legata al coseno al quadrato di α .

Fase 2 i risultati ottenuti nella fase precedente sono stati estesi al caso tridimensionale di orbite ellittiche e non complanari in cui si è tenuto conto anche delle reali effemeridi

² $r_f^{(p)} \equiv r_\oplus = 1.523679342$ AU per Marte^[28] mentre $r_f^{(p)} \equiv r_\ominus = 0.72333199$ AU per Venere^[28]

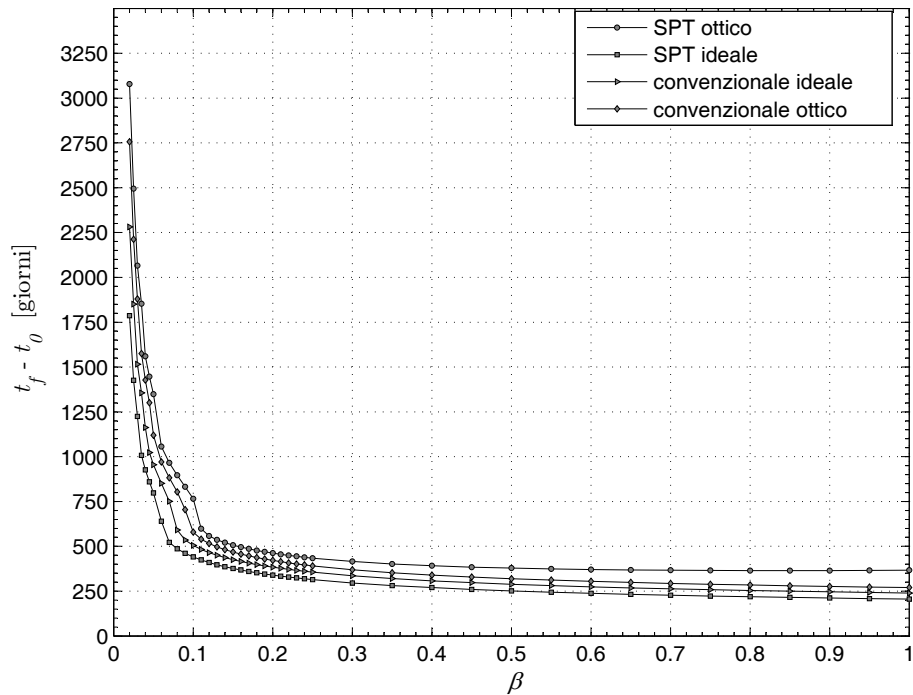


Figura 3.15: Tempo minimo di trasferimento bidimensionale verso Marte in funzione del parametro di snellezza β per una vela composta (modello ideale ed ottico) e per una vela convenzionale (modello ideale ed ottico).

dei pianeti coinvolti nel trasferimento, utilizzando a tale scopo il modello^[37] JPL DE405/LE405.

Come si osserva nelle Figure 3.17 e 3.18, sono state simulate un certo numero di traiettorie di trasferimento rispettivamente verso Marte e Venere per vela composta con modello di forza ideale ed ottico variando la data di partenza (espressa come data Giuliana modificata MJD) attorno al minimo valore raggiungibile per il trasferimento in esame e considerando, per motivi di spazio, soltanto due valori del parametro di snellezza della vela: $\beta = 0.2$ e $\beta = 0.4$.

Dalle Figure 3.16 e 3.18 si osserva che, nel caso di trasferimento verso Venere i minimi valori assoluti individuati attraverso l'analisi tridimensionale sono in accordo con quelli stimati con il modello bidimensionale. Questo comportamento è spiegabile ricordando la bassa eccentricità ($e_{\text{V}} = 0.00677323$) ed inclinazione ($i_{\text{V}} = 3.39471$ deg) dell'orbita eliocentrica venusiana.

Lo stesso comportamento si evince anche nel caso di trasferimenti verso Marte, come si osserva dalle Figure 3.15 e 3.17, anche se la corrispondenza numerica non è buona come nel caso di trasferimenti verso Venere. Questo comportamento è imputabile probabilmente alla maggiore eccentricità dell'orbita eliocentrica marziana ($e_{\text{M}} = 0.09341233$) rispetto a quella venusiana pur essendo la sua inclinazione leggermente

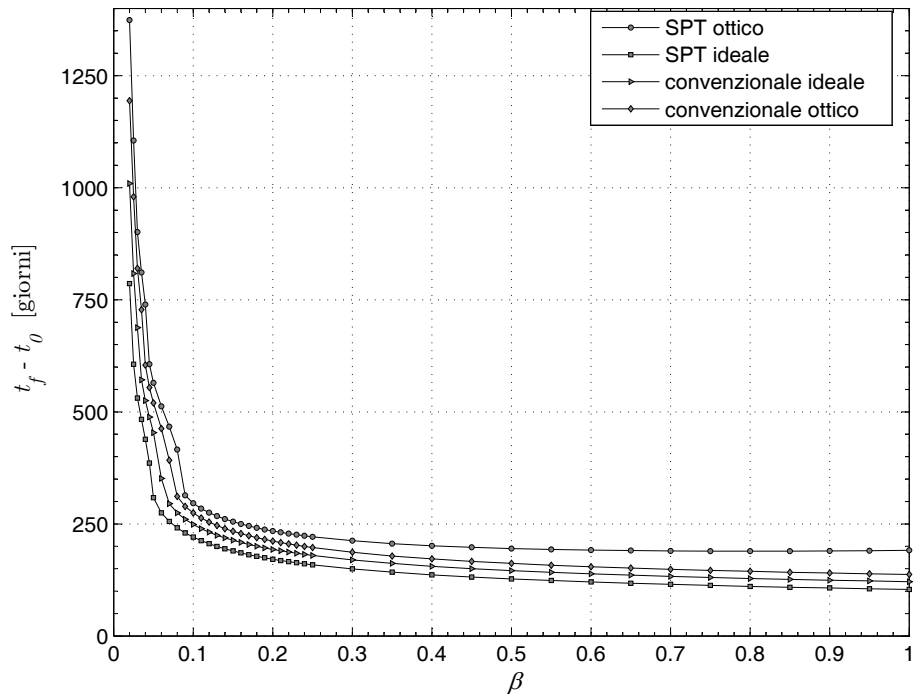


Figura 3.16: Tempo minimo di trasferimento bidimensionale verso Venere in funzione del parametro di snellezza β per una vela composta (modello ideale ed ottico) e per una vela convenzionale (modello ideale ed ottico).

più piccola ($i_{\sigma} = 1.85061$ deg).

3.8 Conclusioni

In questo Capitolo sono state studiate le leggi di controllo che permettono di determinare la traiettoria ottima, dal punto di vista del tempo di missione, per quel che riguarda una vela solare convenzionale con modello di forza ideale, ottico e parametrico ed una vela composta con modello di forza ideale e ottico. Lo studio di ottimo è stato effettuato utilizzando un metodo indiretto basato sulla tecnica classica del calcolo variazionale. Sono stati studiati i legami tra i parametri termo-ottici caratteristici della vela, la sua curvatura sotto l'azione del carico di pressione e la forma della legge di controllo ottima.

Sono state simulate una serie di traiettorie interplanetarie di trasferimento ottime tenendo in conto la reale forma delle orbite dei pianeti coinvolti attraverso un calcolo di effemeridi e stimando la differenza di prestazioni tra una vela ideale ed una vela reale. La trattazione effettuata estende i risultati ottenuti da Sauer^[19] relativi al caso di vela convenzionale ideale, mentre per quel che riguarda la vela composta questa trattazione rappresenta un contributo completamente originale.

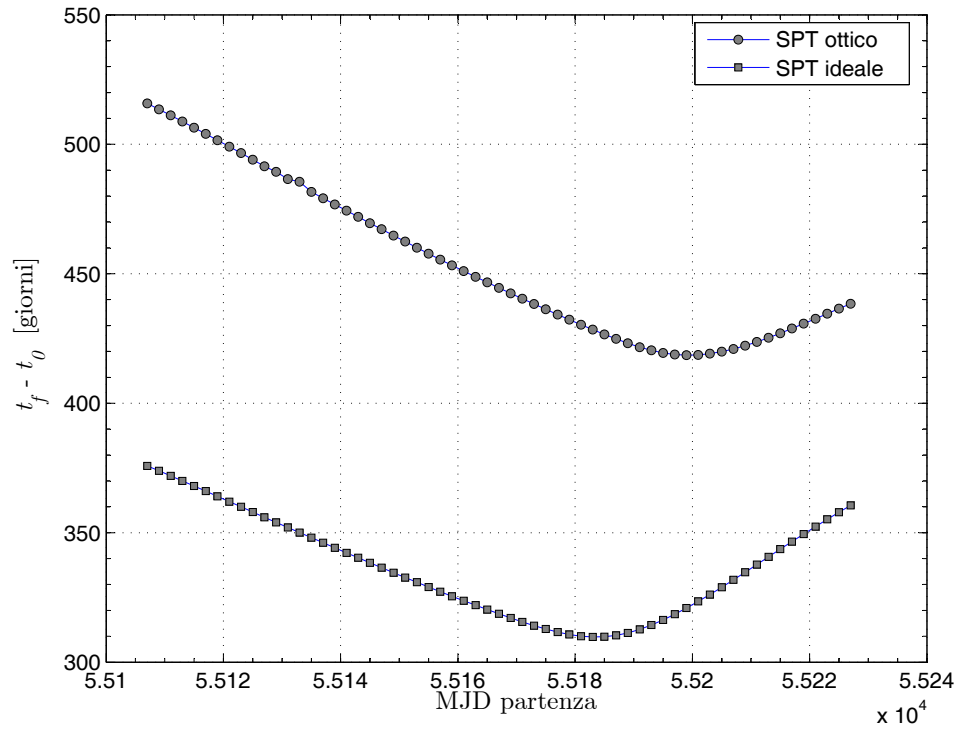
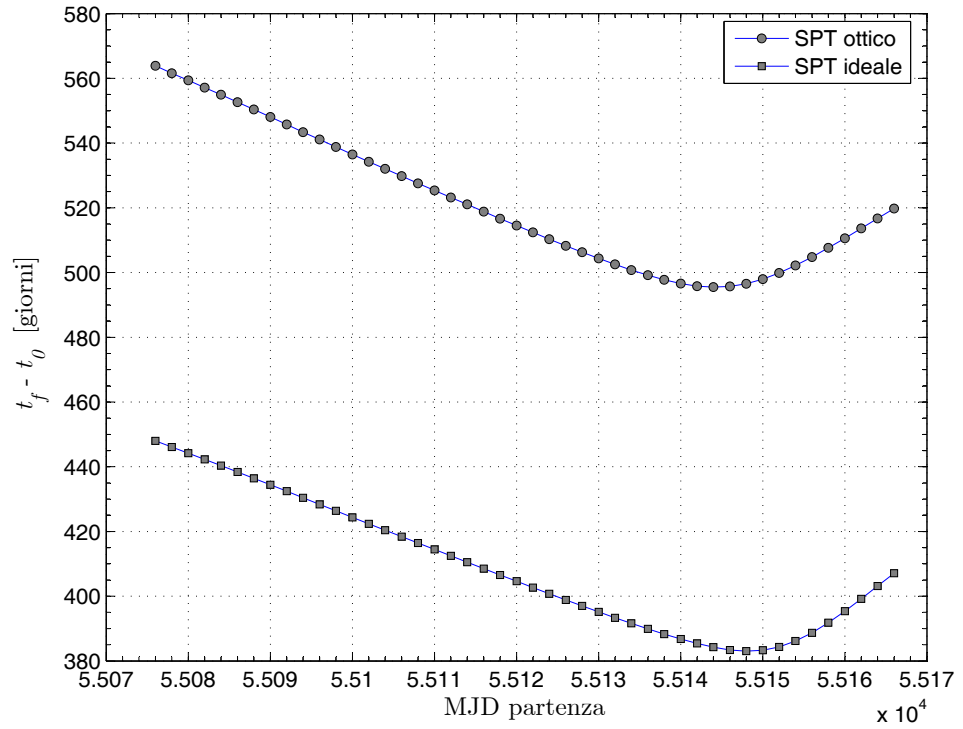
(b) $\beta = 0.4$

Figura 3.17: Tempo minimo di trasferimento tridimensionale verso Marte per una vela composta con modello di forza ideale ed ottico.

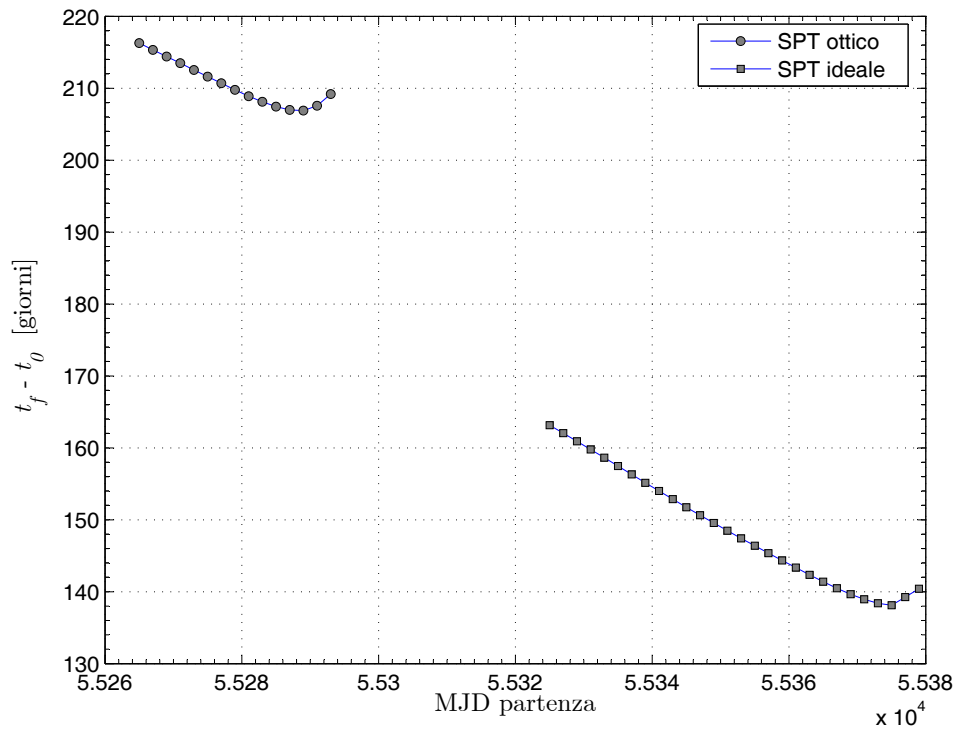
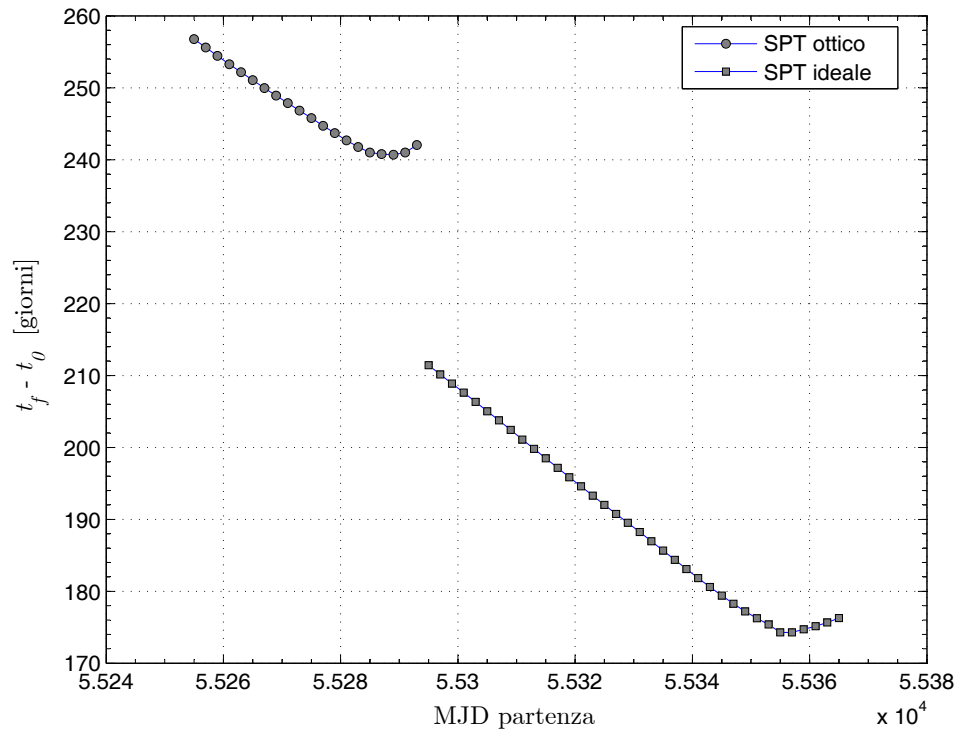
(b) $\beta = 0.4$

Figura 3.18: Tempo minimo di trasferimento tridimensionale verso Venere per una vela composta con modello di forza ideale ed ottico.

4

Traiettorie Localmente-Ottime

4.1 Introduzione

Come è stato discusso nel Capitolo 3, il calcolo della traiettoria ottima mediante approccio indiretto, comporta sempre la soluzione di un problema matematico dei due punti. La soluzione di questo problema il più delle volte richiede un notevole volume di calcolo con un conseguente tempo computazionale tutt'altro che trascurabile. Inoltre, come è stato esplicitamente osservato nella sezione §3.6, la traiettoria ottima è estremamente sensibile alle condizioni iniziali imposte a causa della forte non-linearità di problemi di questo tipo. Da un punto di vista pratico tutto questo si traduce in una difficoltà, talvolta insormontabile viste le attuali capacità di calcolo degli elaboratori di bordo, di realizzare un sistema di controllo che sia in grado autonomamente di ricalcolare la traiettoria ottima in una data missione a causa di eventuali perturbazioni che hanno allontanato il sistema dalla sua traiettoria (ottima) nominale. Questo problema è tanto più evidente nelle missioni dove si renda necessaria una veloce (e ripetuta) variazione di assetto della vela al fine di seguire la traiettoria ottima globale, come ad esempio le missioni planetocentriche^[12].

Per ovviare a tutti questi inconvenienti si preferisce, in questa classe di missioni, rilassare la condizione di ottimalità globale della traiettoria al fine di ottenere una legge di controllo (in ciclo chiuso) di più semplice implementazione. A tale scopo si ottimizza (massimizza o minimizza a seconda delle esigenze) il valore istantaneo di un funzionale J preventivamente fissato. Per questo motivo le traiettorie così ottenute vengono chiamate *localmente-ottime* per distinguerle dalle traiettorie *globalmente-ottime* (o semplicemente *ottime*) studiate nel Capitolo 3.

4.2 Traiettorie di fuga dalla Terra

Una possibile ed interessante applicazione dei sistemi propulsivi a vela solare consiste nella realizzazione di traiettorie di fuga dalla Terra. Il problema è stato affrontato più

volte in letteratura fin dai primi anni '60 con il contributo di Sands^[38] e Fimple^[39], i quali considerarono in maniera semplificata delle orbite iniziali di parcheggio circolari e trascurando eventuali effetti perturbativi, ed in seguito da Sackett e Edelbaum^[40].

Le traiettorie di fuga localmente-ottimali sono state considerate da numerosi autori^[41;42;43] in varie forme. In un recente articolo, Coverstone e Prussing^[35] hanno studiato il problema della fuga dalla Terra partendo da un' orbita di tipo GTO (*Geosynchronous Transfer Orbit*) utilizzando una vela solare convenzionale con modello di forza ideale. Gli Autori hanno utilizzato un algoritmo di controllo che massimizza la variazione istantanea dell'energia meccanica specifica del sistema tenendo in conto esclusivamente delle perturbazioni legate all'attrazione solare sulla vela solare.

Nei successivi paragrafi il modello derivato da Coverstone e Prussing verrà esteso in vari modi. Innanzitutto verranno considerate, in aggiunta alla perturbazione legata all'attrazione luni-solare, le perturbazioni dovute alla non perfetta sfericità del campo gravitazionale terrestre e verrà tenuta in conto la variazione del flusso solare dovuto all'eccentricità dell'orbita eliocentrica della Terra. Infine verrà effettuato un confronto tra le prestazioni di fuga della vela convenzionale con modello ideale e la vela composta con modello ideale.

4.2.1 Equazioni del moto

Le equazioni del moto per un veicolo spaziale il cui sistema propulsivo principale è costituito da una vela solare in un sistema di riferimento inerziale geocentrico $\mathcal{T}_{\oplus}(x,y,z)$ sono:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{a}_p + \mathbf{a} \quad (4.2)$$

dove $[\mathbf{r}]_{\mathcal{T}_{\oplus}} = [r_x, r_y, r_z]^T$ e $[\mathbf{v}]_{\mathcal{T}_{\oplus}} = [v_x, v_y, v_z]^T$ sono i vettori posizione e velocità del veicolo spaziale le cui componenti sono espresse nel sistema \mathcal{T}_{\oplus} , $r \triangleq \|\mathbf{r}\|$ è la distanza del veicolo spaziale dal centro di attrazione terrestre, \mathbf{a}_p è la risultante delle accelerazioni perturbative agenti sul veicolo, \mathbf{a} è l'accelerazione propulsiva dovuta alla vela solare e $\mu_{\oplus} = 398\,600.4415 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ è il parametro gravitazionale della Terra^[44].

Nel seguito verranno tenute in considerazione, per quel che riguarda le perturbazioni orbitali, sia l'attrazione luni-solare^[45] che la non perfetta sfericità del campo gravitazionale terrestre^[46] fino all'armonica J_6 . Per quel che riguarda il modello di forza ideale, per una classe di vela convenzionale e composta, l'accelerazione propulsiva ha la seguente forma

(si osservi a tal proposito la Figura 4.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{2PA\eta}{m} (\hat{\mathbf{r}}_{\odot s} \cdot \hat{\mathbf{a}})^p \hat{\mathbf{a}} \\ &= \frac{\eta\beta\mu_{\odot}}{r_{\odot s}^2} (\hat{\mathbf{r}}_{\odot s} \cdot \hat{\mathbf{a}})^p \hat{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove, come già fatto precedentemente, A indica la superficie della vela per la classe convenzionale mentre coincide con la superficie proiettata sul piano perpendicolare all'asse del collettore per la vela composta, m è la massa totale del veicolo spaziale, $\hat{\mathbf{r}}_{\odot s} \triangleq (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot})/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|$ è il versore nella direzione della radiazione solare incidente, P è la pressione di radiazione solare (cfr. §2.2), β è il parametro di snellezza della vela e $\hat{\mathbf{a}} \triangleq \mathbf{a}/a$ è il versore della spinta propulsiva della vela. Si osservi che, in base a quanto discusso

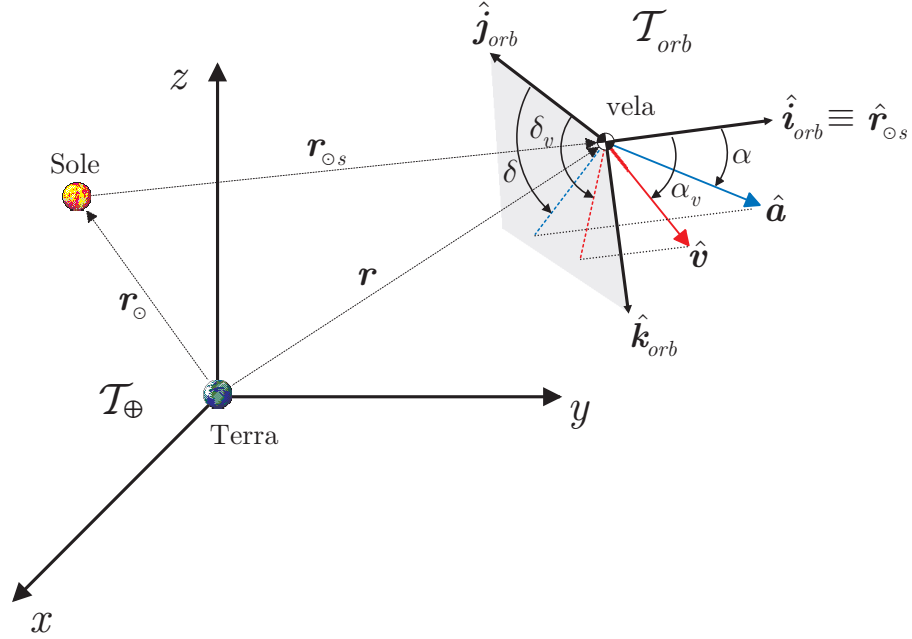


Figura 4.1: Sistemi di riferimento adottati e parametri geometrici caratteristici del problema nello studio di traiettorie di fuga dalla Terra.

nelle sezioni §2.5.1 e §2.6.4, il versore della spinta coincide con

- il versore normale alla vela $\hat{\mathbf{n}}$ nella direzione dei raggi solari incidenti per una vela convenzionale;
- il versore normale allo specchio direttore $\hat{\mathbf{n}}_d$ nella direzione dei raggi solari incidenti per una vela composta o SPT.

Nell'equazione (4.3) l'indice p è stato utilizzato per definire la classe di vela solare, con $p = 2$ corrispondente alla vela convenzionale e $p = 1$ corrispondente alla vela composta.

Inoltre il termine $\eta \in [0,1]$ rappresenta la *funzione d'ombra*^[47] la quale stabilisce quando il veicolo spaziale si trova completamente nel cono d'ombra della Terra ($\eta = 0$) oppure è in penombra ($0 < \eta < 1$). Ovviamente $\eta = 1$ corrisponde ad avere una vela solare perfettamente illuminata dai raggi solari e quindi all'esterno della regione d'ombra generata dalla Terra.

Le effemeridi geocentriche del Sole (\mathbf{r}_\odot) e della Luna sono state calcolate ricorrendo al modello^[48;49] JPL DE200/LE200 sviluppato da Standish. Questo permette di tenere in conto la variazione temporale del flusso solare, e quindi della pressione di radiazione P , dell'ordine di circa il 6% in un anno tropicale terrestre, dovuta all'eccentricità dell'orbita eliocentrica della Terra.

Si definisca una terna orbitale $\mathcal{T}_{orb}(x_{orb}, y_{orb}, z_{orb})$ di versori $\hat{\mathbf{i}}_{orb} \equiv \hat{\mathbf{r}}_{\odot s}$, $\hat{\mathbf{j}}_{orb}$ e $\hat{\mathbf{k}}_{orb}$. Si supponga che il piano $z_{orb} = 0$ contenga l'asse z della di \mathcal{T}_\oplus e che y_{orb} punti verso il polo nord terrestre. Risulta conveniente, come già fatto nel caso di traiettorie eliocentriche nella sezione §2.5.1, esprimere le componenti del versore $\hat{\mathbf{a}}$ nella terna orbitale \mathcal{T}_{orb} in funzione dell'angolo di cono così definito

$$\alpha \triangleq \arccos(\hat{\mathbf{r}}_{\odot s} \cdot \hat{\mathbf{a}}) \in [0, \pi/2] \quad (4.4)$$

e dell'angolo di azimut $\delta \in [-\pi, \pi]$ (cfr. Figura 4.1). In questo modo si ottiene:

$$[\hat{\mathbf{a}}]_{\mathcal{T}_{orb}} = [\cos \alpha, \sin \alpha \cos \delta, \sin \alpha \sin \delta]^T \quad (4.5)$$

4.2.2 Legge di controllo quasi-ottima

Facendo riferimento a quanto affermato da Coverstone e Prussing^[35], un metodo efficiente per incrementare l'energia meccanica specifica \mathcal{E} definita come

$$\mathcal{E} \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu_\oplus}{r} \quad (4.6)$$

è quello di massimizzare istante per istante la variazione istantanea dell'energia meccanica specifica $\dot{\mathcal{E}}$. È opportuno osservare che questa logica di controllo non permette di ottenere delle traiettorie di minimo tempo nel senso globale del termine ma solamente delle traiettorie di quasi-minimo tempo^[35].

La differenza tra i tempi necessari alla fuga nel caso di traiettorie di minimo e traiettorie di quasi-minimo nel caso di fuga dalla Terra è sostanzialmente molto contenuta. Hartmann^[50] ha mostrato che la legge di controllo che massimizza $\dot{\mathcal{E}}$ genera delle traiettorie di quasi-minimo tempo che approssimano bene (dal punto di vista dei tempi) le traiettorie di minimo tempo quando l'accelerazione propulsiva della vela è più piccola di $10^{-4}g$, dove g indica l'accelerazione di gravità terrestre standard. Tenendo conto dell'attuale tecnologia nella costruzione delle vele solari e le previsioni, anche le più ottimistiche, per il futuro più prossimo si può affermare con ragionevolezza che la legge di controllo che

massimizza $\dot{\mathcal{E}}$ è adeguata allo studio (perlomeno preliminare) di una traiettoria di fuga dal nostro pianeta.

Al fine di determinare matematicamente questa legge di controllo quasi-ottima si consideri il prodotto scalare tra l'espressione di $\dot{\mathbf{v}}$ data nella (4.2) ed il vettore velocità \mathbf{v} . Tenendo conto della (4.6) si ottiene la derivata temporale dell'energia meccanica specifica:

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \quad (4.7)$$

Come si osserva dall'equazione precedente, il problema adesso è quello di determinare la legge di controllo $\mathbf{u}(t) = [\alpha(t), \delta(t)]^T$ che, ad un generico istante di tempo, massimizza la proiezione dell'accelerazione propulsiva della vela \mathbf{a} nella direzione del vettore velocità \mathbf{v} . Questo corrisponde a massimizzare istante per istante l'indice di prestazione $J \triangleq \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$, ovvero:

$$\mathbf{u} = \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} J \quad (4.8)$$

dove \mathcal{U} indica il dominio dei controlli ammissibili (cfr. §2.7).

Facendo riferimento alla Figura 4.1 è possibile esprimere le componenti del vettore velocità nella terna orbitale \mathcal{T}_{orb} ricorrendo agli angoli α_v e δ_v (rispettivamente angolo di cono e di azimut) nella maniera seguente:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{T}_{orb}} = v [\cos \alpha_v, \sin \alpha_v \cos \delta_v, \sin \alpha_v \sin \delta_v]^T \quad \text{con } \alpha_v \in [0, \pi] \quad (4.9)$$

Sostituendo le equazioni (4.3) e (4.5) nella (4.8) si ottiene:

$$J = \eta \beta \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot s}^2} v \cos^p \alpha (\cos \alpha \cos \alpha_v \sin \alpha \cos \delta \sin \alpha_v \cos \delta_v + \sin \alpha \sin \delta \sin \alpha_v \sin \delta_v) \quad (4.10)$$

Gli angoli di controllo α e δ che massimizzano J vengono determinati imponendo la condizione necessaria $\partial J / \partial \mathbf{u} = 0$. Dopo alcuni semplici passaggi algebrici si perviene alle seguenti relazioni:

$$\tan \alpha = \frac{-(1+p) \cos \alpha_v + \sqrt{(1+p)^2 \cos^2 \alpha_v + 4p \sin^2 \alpha_v}}{2p \sin \alpha_v} \quad (4.11)$$

$$\tan \delta = \tan \delta_v \quad (4.12)$$

Nel caso si consideri una vela convenzionale con modello ideale ($p = 2$), l'equazione (4.11) fornisce la legge di controllo quasi-ottima in perfetto accordo con quanto riportato già in letteratura^[41;35]. Nel caso invece di vela composta con modello di forza ideale ($p = 2$)

l'equazione (4.11) si riduce alla seguente relazione:

$$\alpha_{\text{SPT}} = \frac{\alpha_v}{2} \quad (4.13)$$

Come conseguenza dell'equazione (4.12), i versori $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{r}}_{\odot s}$ e $\hat{\mathbf{v}} \triangleq \mathbf{v}/v$ sono complanari. questa considerazione permette di rimuovere la dipendenza da $\hat{\mathbf{a}}$ nelle equazioni del moto. Infatti:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_v - \alpha)}{\sin \alpha_v} \hat{\mathbf{r}}_{\odot s} + \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_v} \hat{\mathbf{v}} & \text{per } \alpha_v \in (0, \pi) \\ \hat{\mathbf{r}}_{\odot s} & \text{per } \alpha_v = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

dove

$$\cos \alpha_v = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\odot s} \quad \text{e} \quad \sin \alpha_v = |\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{r}}_{\odot s}| \quad (4.15)$$

Si osservi che per $\alpha_v = \pi$ si ottiene, tenendo presente l'equazione (4.11), un valore dell'angolo di cono $\alpha = \pi/2$. In questo caso tutti i termini contenenti l'accelerazione propulsiva nelle equazioni del moto (cfr l'equazione (4.2)) svaniscono poiché $\mathbf{a}(\alpha = \pi/2) \equiv 0$.

Infine, dalla (4.13) e (4.14) si ottiene l'espressione semplificata del versore della spinta (coincidente con quello dell'accelerazione propulsiva) nella vela composta:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\text{SPT}} = \frac{\hat{\mathbf{r}}_{\odot s} + \hat{\mathbf{v}}}{\sqrt{2(1 + \cos \alpha_v)}} \quad \text{per } \alpha_v \in [0, \pi) \quad (4.16)$$

4.2.3 Simulazioni ed analisi dei risultati

La legge di controllo descritta precedentemente è stata applicata nella simulazione di traiettorie di fuga dalla Terra per un veicolo spaziale dotato di una vela solare, convenzionale oppure composta con modello di forza ideale. Al fine di ridurre la sensibilità numerica del problema è stato adottato un sistema di unità canoniche terrestri^[44] $\text{DU}_{\oplus} \triangleq 6378.13655 \text{ km}$ e $\text{TU}_{\oplus} \triangleq 806.81103 \text{ s}$ (si osservi che in questo modo $\mu_{\oplus} = 1 \text{ DU}_{\oplus}^3 / \text{TU}_{\oplus}^2$, ovvero il parametro gravitazionale terrestre risulta unitario). Il sistema differenziale costituito dalle equazioni del moto (4.1)–(4.2) è stato integrato in doppia precisione utilizzando un metodo di Runge-Kutta del quinto ordine con passo variabile mantenendo una tolleranza assoluta e relativa pari a 10^{-12} (in unità canoniche). A scopo comparativo, è stata considerata la stessa orbita di partenza utilizzata da Coverstone e Prussing^[35]. Si tratta di un'orbita di tipo GTO (*Geosynchronous Transfer Orbit*) tipica del lanciatore Ariane 5, con un'inclinazione di 7 deg sul piano equatoriale terrestre, un'eccentricità $e = 0.716$ ed una quota al perigeo pari a 600 km.

Per ognuna delle due classi di vela solare considerata (convenzionale e composta o SPT), sono stati studiati i tre seguenti modelli di ambiente spaziale:

- a) nessun tipo di perturbazione orbitale agisce sul veicolo spaziale, questo equivale a

porre $\mathbf{a}_p = 0$ nell'equazione (4.2) e la vela viene considerata sempre in piena luce ($\eta \equiv 1$ nell'equazione (4.3));

- b) nessun tipo di perturbazione orbitale agisce sul veicolo spaziale, ma viene considerato l'effetto dell'ombra proiettata dalla Terra (η variabile);
- c) tutti gli effetti perturbativi prima citati (attrazione luni-solare, non sfericità del campo gravitazionale terrestre) vengono considerati insieme all'effetto dell'ombra proiettata dalla Terra.

Tutte le simulazioni sono state effettuate utilizzando la medesima orientazione dell'orbita e la stessa accelerazione caratteristica $a_c = 0.93 \text{ mm/s}^2$. In particolare alla partenza è stata assunta una longitudine del nodo ascendente $\Omega = 180 \text{ deg}$, un argomento del perigeo $\omega = 270 \text{ deg}$ ed un'anomalia vera nulla.

L'intervallo di tempo necessario alla fuga dalla Terra (equivalente al raggiungimento dell'energia meccanica specifica di fuga) in funzione della data di lancio compresa nell'intervallo 1/1/2004–31/12/2004 è stato riportato nella Figura 4.2.

Le simulazioni sono state effettuate supponendo di spiegare la vela il primo ed il ventunesimo giorno di ogni mese all'interno dell'intervallo di tempo considerato. La mancanza di punti nella Figura 4.2 rivela che in alcuni casi il raggio al perigeo diventa più piccolo del raggio medio terrestre, indicando in questo modo un impatto del veicolo spaziale sulla superficie terrestre. La possibilità che questo avvenga è stata già discussa precedentemente in letteratura^[35]. Questo problema può essere evitato utilizzando un controllo misto anche sull'eccentricità dell'orbita, come suggerito da Macdonald e McInnes^[41]. Infine la Figura 4.2 dimostra chiaramente la superiorità della vela composta dal punto di vista del tempo di fuga sulla vela convenzionale (entrambe con modello ideale di forza ovviamente), con una riduzione media del tempo pari al 15% per tutti e tre i modelli di ambiente spaziale.

La data di lancio ha un'influenza sostanziale sull'efficienza della manovra di fuga, come si può osservare nella Figura 4.2. Durante le simulazioni effettuate non è stato tuttavia riscontrato nessun andamento significativo dei tempi di fuga in funzione della data di partenza. Questo conferma i risultati già ottenuti da Macdonald e McInnes^[51] sull'influenza della data di partenza sulle prestazioni di una manovra di fuga effettuata utilizzando una vela solare.

Si osservi che in alcuni casi il modello c (il quale include tutte le perturbazioni orbitali considerate in questo studio) fornisce dei tempi di fuga migliori (quindi più contenuti) rispetto al modello a che invece trascura ogni sorta di perturbazione agente sulla vela solare. Questo comportamento, apparentemente contraddittorio, può essere spiegato osservando che il tempo di fuga è fortemente influenzato dalle condizioni (traiettoria, posizione relativa Terra-vela-Sole, velocità) in cui si trova la vela solare quando la sua energia meccanica specifica è prossima inferiormente al valore critico di fuga $\mathcal{E} = 0$. Infatti la differenza

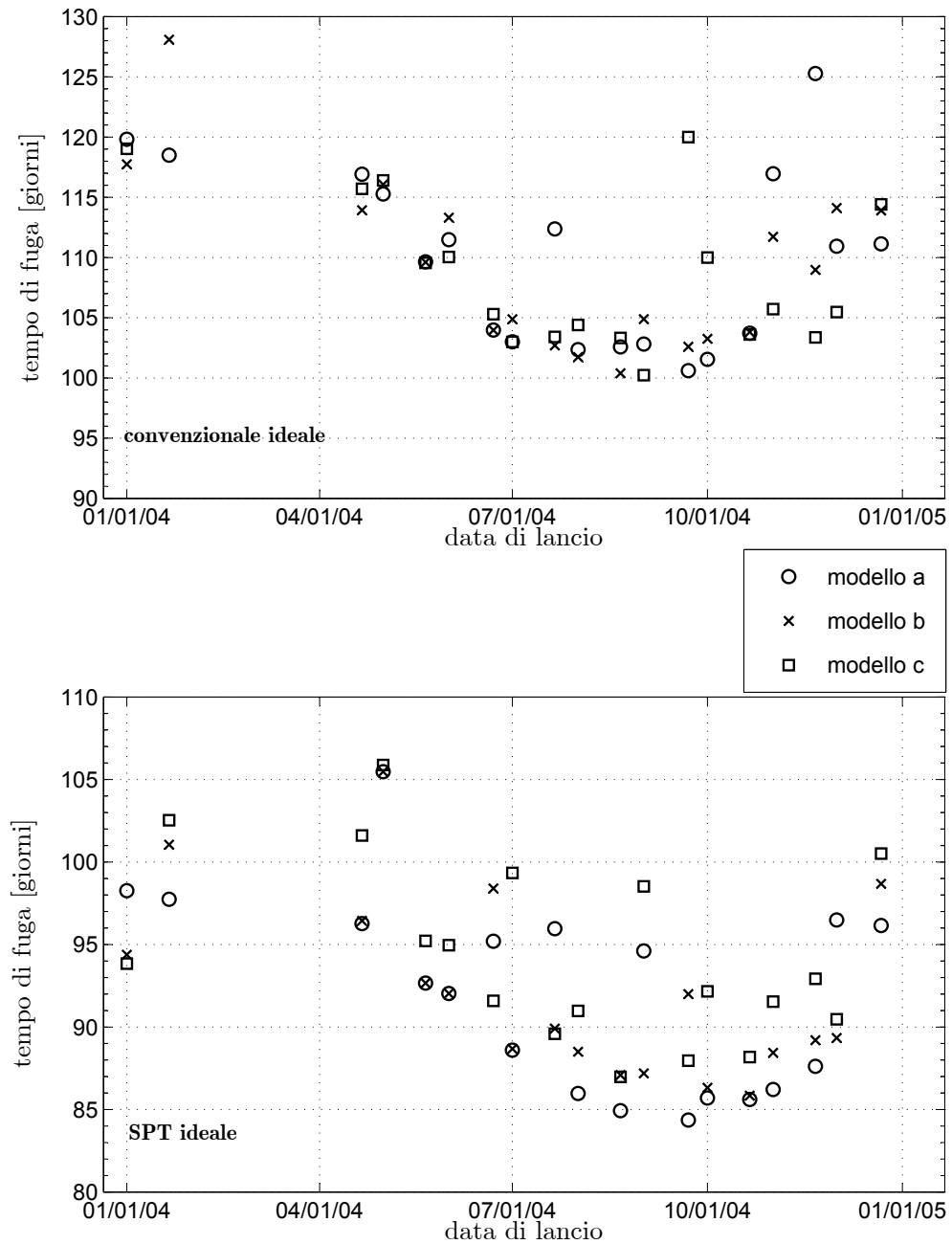


Figura 4.2: Tempo di fuga dalla Terra per una vela convenzionale e composta con modello di forza ideale e per i tre modelli di ambiente spaziale considerati.

tra i tempi di fuga nei tre modelli di ambiente spaziale considerati è legata strettamente alla posizione relativa Sole-vela durante le ultime spirali percorse dal veicolo spaziale attorno alla Terra prima di raggiungere le condizioni di fuga. In alcuni casi la posizione del Sole rispetto alla vela è tale da richiedere una semi-spirale aggiuntiva, e quindi una semi-rivoluzione in più attorno alla Terra, per sfruttare a meglio la pressione di radiazione solare. Questo comportamento è illustrato nella Figura 4.3 per una vela convenzionale

ideale. Nella Figura 4.3 si osserva che il grafico dell'energia meccanica specifica per i modelli a e c sono sostanzialmente coincidenti per i primi 80 giorni di missione. In seguito, la distanza della vela dalla Terra è tale (e quindi l'attrazione gravitazionale del nostro pianeta è sufficientemente piccola) da far risaltare maggiormente le differenti accelerazioni subite dalla sonda nei due modelli.

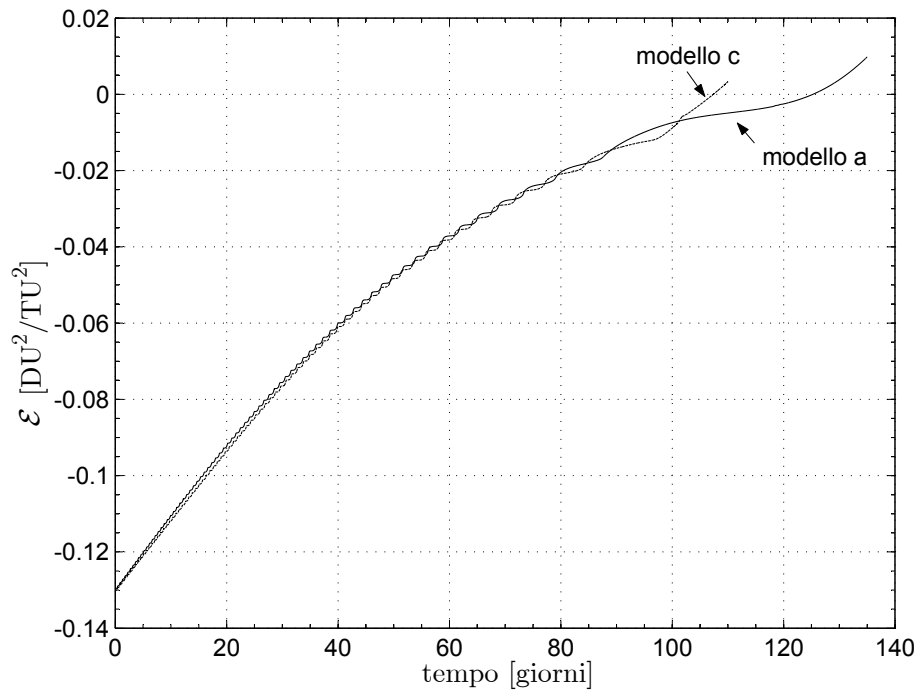


Figura 4.3: Variazione temporale dell'energia meccanica specifica per una vela convenzionale con due modelli di ambiente spaziale (a, c) per una data di partenza 21/11/2004.

Assumendo come data di partenza il 21 Novembre 2004 e prendendo a riferimento il modello c sono state riportate le due differenti traiettorie per una vela convenzionale e composta nella Figura 4.4.

4.3 Innalzamento orbitale

Nella sezione precedente è stata analizzata una legge di controllo quasi-ottima per il raggiungimento delle condizioni di fuga dalla Terra. Un approccio simile nella forma può essere utilizzato anche per la sintesi di una legge di controllo relativa al semplice innalzamento orbitale partendo da un'orbita bassa (LEO, *Low Earth Orbit*). In questo caso, oltre alle fonti perturbative già considerare, bisogna tenere in conto anche gli effetti legati alla resistenza aerodinamica residua. Benché la resistenza aerodinamica sia stata talvolta considerata in alcune analisi preliminari di missione da diversi autori^[52;53], al momento

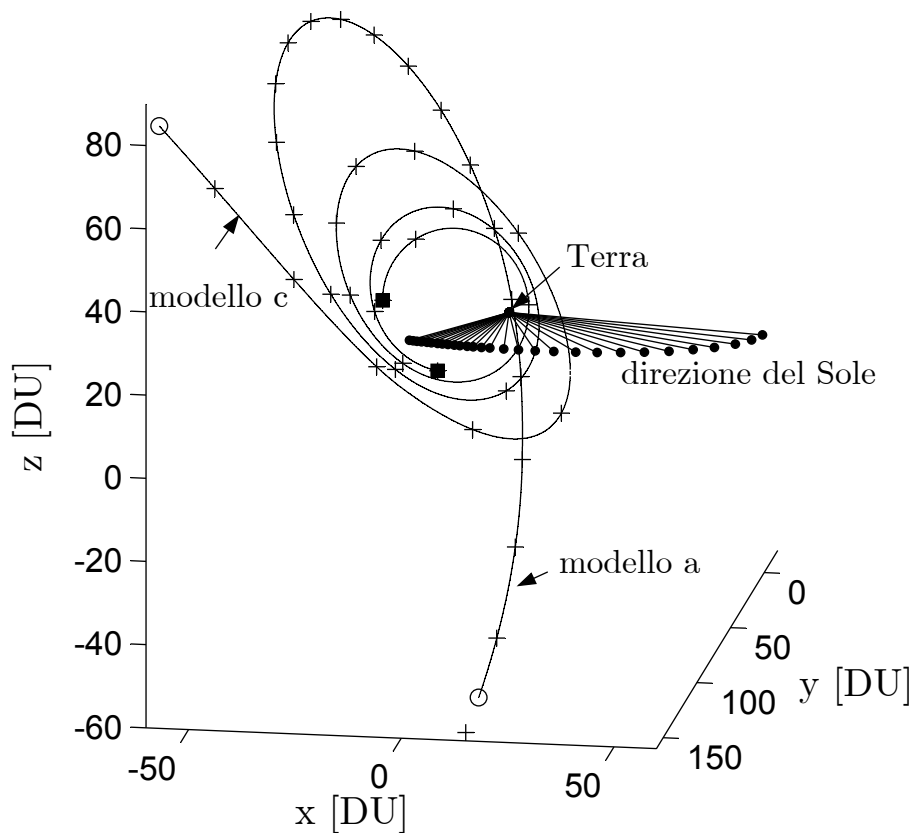


Figura 4.4: Grafico tridimensionale della traiettoria seguita dalla vela solare (data di partenza 21/11/2004) convenzionale e composta. I quadratini neri rappresentano la posizione della vela dopo 70 giorni dalla partenza, i cerchi bianchi corrispondono al raggiungimento delle condizioni di fuga. Le croci indicano il tempo in intervalli di due giorni.

non esiste in letteratura uno studio sistematico concernente gli effetti che può avere la resistenza sulla traiettoria seguita da un veicolo spaziale il cui sistema propulsivo principale è costituito da una vela solare.

Questo tipo di perturbazione non può essere assolutamente trascurata per orbite basse (al di sotto di 1000 km di quota¹) a causa della notevole superficie esposta di una classica vela solare. Inoltre la resistenza atmosferica deve essere considerata nello studio di particolari manovre orbitali, come ad esempio quelle relative all'innalzamento orbitale.

Per questi motivi in questo paragrafo verrà analizzato l'effetto della resistenza atmosferica residua su di una traiettoria di innalzamento orbitale e verrà sviluppata la corrispondente legge di controllo quasi-ottima. Al fine di semplificare il problema dal punto di vista aerodinamico, la vela convenzionale con modello di forza ideale sarà considerata alla stregua di una lastra piana e verrà utilizzato un modello di flusso ipertermico.

¹questo valore è fortemente influenzato dall'attività solare

4.3.1 Equazioni del moto

Le equazioni del moto del veicolo spaziale dotato di vela solare sono le stesse (equazioni (4.1)–(4.2)) descritte nel paragrafo §4.2.1 e relative allo studio della traiettoria di fuga dalla Terra. In aggiunta, nell'equazione (4.2) bisogna inserire il termine che riguarda l'accelerazione perturbativa \mathbf{a}_d dovuta alla resistenza aerodinamica. L'equazione, per completezza viene di seguito riscritta:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^3} \mathbf{r} + \frac{P_{\oplus} A}{m} (\hat{\mathbf{r}}_{\odot s} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{a}_d + \mathbf{a}_p \quad (4.17)$$

dove P_{\oplus} è la pressione di radiazione solare per una vela perfettamente riflettente in orbita attorno alla Terra², pari al doppio della pressione di radiazione solare P solitamente utilizzata finora.

Per semplificare il problema da un punto di vista matematico, la vela solare viene considerata come una lastra piana^[53] ottenendo la seguente espressione dell'accelerazione aerodinamica:

$$\mathbf{a}_d = \frac{1}{2m} \rho A v^2 (C_L \hat{\mathbf{v}}_{\perp} - C_D \hat{\mathbf{v}}) \quad (4.18)$$

dove ρ è la densità atmosferica locale^[54], C_L e C_D sono rispettivamente il coefficiente di portanza e di resistenza mentre $\hat{\mathbf{v}}_{\perp}$ è il versore perpendicolare al versore della velocità $\hat{\mathbf{v}}$ nel piano $(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{n}})$.

Considerando un flusso ipertermico, dove cioè la velocità traslazionale della vela solare è molto più grande del moto termico delle particelle atmosferiche, si hanno i seguenti coefficienti di portanza e di resistenza^[55;56] (si veda la Figura 4.5):

$$C_L = 2 \left[(2 - \sigma_n - \sigma_t) \cos \zeta + \sigma_n \left(\frac{v_b}{v} \right) \right] \sin \zeta \cos \zeta \quad (4.19)$$

$$C_D = 2 \left[(2 - \sigma_n - \sigma_t) \cos^2 \zeta + \sigma_n \left(\frac{v_b}{v} \right) \cos \zeta + \sigma_t \right] \cos \zeta \quad (4.20)$$

dove σ_n e σ_t sono i coefficienti di accomodamento per lo scambio di quantità di moto normale e tangenziale, v_b è la velocità termica media delle particelle atmosferiche alla temperatura di equilibrio della vela e $\zeta \in [0, \pi/2]$ è l'angolo compreso tra i versori $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$, ovvero

$$\cos \zeta \triangleq \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.21)$$

Chiaramente ζ è il complementare del classico angolo di incidenza della lastra piana. Si osservi che alle quote di interesse^[53] il termine v_b/v nell'equazione (4.20) risulta tipicamente all'incirca pari a 0.05.

²a titolo indicativo un valore medio in un anno terrestre è P_{\oplus} is 9.114×10^{-6} Pa

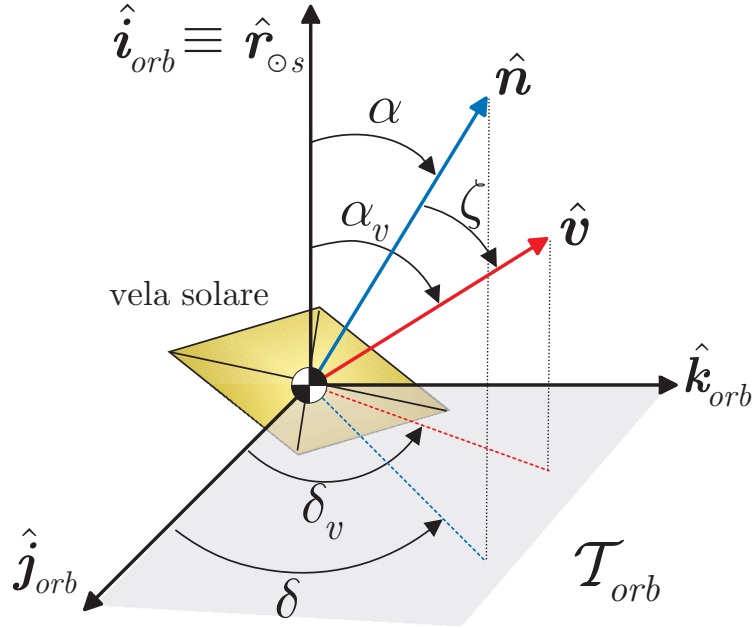


Figura 4.5: Angoli caratteristici della vela nello studio di un innalzamento orbitale da orbita bassa.

4.3.2 Legge di controllo quasi-ottima

Una legge di controllo particolarmente efficace per l'innalzamento orbitale consiste nel massimizzare istantaneamente la variazione temporale del semiasse maggiore dell'orbita osculante. È ben noto^[12;41] che questa legge di controllo è equivalente a quella che massimizza la variazione istantanea dell'energia meccanica specifica \mathcal{E} definita nell'equazione (4.6).

Effettuando il prodotto scalare tra l'espressione (4.17) e \mathbf{v} e sostituendo le equazioni (4.18) e (2.5) si ottiene:

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v} + \frac{P_{\oplus} A}{m} v \cos^2 \alpha (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) - \frac{1}{2m} \rho A C_D v^3 \quad (4.22)$$

Quando l'angolo ζ (cfr. l'equazione (4.21)) è sostituito nell'equazione (4.22), la variazione temporale dell'energia meccanica specifica assume la forma seguente:

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v} + \frac{P_{\oplus} A}{m} v \left[\cos^2 \alpha \cos \zeta - f \frac{C_D}{2} \right] \quad (4.23)$$

dove

$$f \triangleq \frac{\rho v^2}{P_{\oplus}} \quad (4.24)$$

Per definizione, il parametro adimensionale $f \geq 0$ risulta pari al doppio del rapporto tra la pressione dinamica locale ($\rho v^2/2$) e la pressione di radiazione solare sulla vela

convenzionale ideale (P_{\oplus}).

Per orbite quasi circolari $v^2 \cong \mu_{\oplus}/r$ e quindi f assume la forma semplificata seguente

$$f \cong \frac{\mu_{\oplus} \rho}{P_{\oplus} r} \quad (4.25)$$

In altri termini f è funzione della quota della vela solare e dell'attività solare (attraverso ρ), come sintetizzato nella Figura 4.6. Si osservi inoltre che f può essere utilizzato per

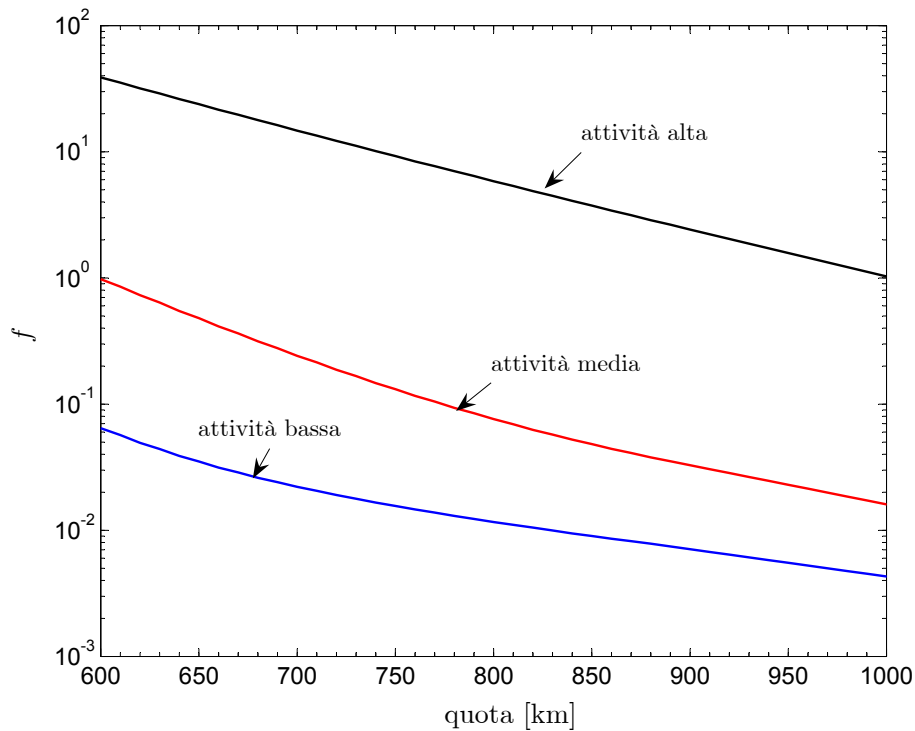


Figura 4.6: Variazione del parametro f con la quota e con l'attività solare ($P_{\oplus} \cong 9.114 \times 10^{-6}$ Pa).

stimare la minima quota in corrispondenza della quale il veicolo spaziale dotato della vela solare può operare. Infatti, imponendo che la spinta massima generata dalla vela bilanci esattamente la resistenza aerodinamica si ottiene

$$P_{\oplus} A = \rho A v^2 C_{D_{\max}}/2 \quad (4.26)$$

da cui si ottiene

$$f C_{D_{\max}}/2 = 1 \quad (4.27)$$

Assumendo che $C_{D_{\max}} \cong 2$, dall'equazione (4.27) si osserva che la quota minima operativa per una vela solare è semplicemente quella quota in corrispondenza della quale $f = 1$. Dalla Figura 4.6 si ricava che la minima quota operativa è all'incirca pari a 1000 km ed a 600 km rispettivamente per attività solare alta e media. Questi risultati sono in accordo

con i valori presenti in letteratura^[53]. Infine il parametro f gioca un ruolo fondamentale nella definizione della legge di controllo quasi-ottima, come discusso in seguito.

Come affermato precedentemente, determinare la legge di controllo quasi-ottima consiste nel calcolare al generico istante t il vettore di controllo $\mathbf{u}(t) = [\alpha(t), \delta(t)]^T$ che massimizza la variazione temporale dell'energia meccanica specifica. Questo equivale a massimizzare il funzionale J che coincide con la parte di $\dot{\mathcal{E}}$ che dipende esplicitamente dalle variabili di controllo (cfr. equazione (4.8)):

$$J \triangleq \dot{\mathcal{E}} - \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{v} = \frac{P_{\oplus} A}{m} v \left[\cos^2 \alpha \cos \zeta - f \frac{C_D}{2} \right] \quad (4.28)$$

Sostituendo le equazioni (4.20), (3.4) e (4.9) nella (4.28) si ottiene dopo alcuni passaggi:

$$J = \frac{P_{\oplus} A v}{m} \cos^2 \alpha (\cos \alpha \cos \alpha_v + \sin \alpha \cos \delta \sin \alpha_v \cos \delta_v + \sin \alpha \sin \delta \sin \alpha_v \sin \delta_v) - \frac{\rho v^3 A}{m} \left[(2 - \sigma_n - \sigma_t) \cos^2 \zeta + \sigma_n \left(\frac{v_b}{v} \right) \cos \zeta + \sigma_t \right] \cos \zeta \quad (4.29)$$

Imponendo la condizione necessaria $\partial J / \partial \delta = 0$ al fine di massimizzare J si ottiene:

$$\tan \delta = \tan \delta_v \quad (4.30)$$

L'equazione (4.30) indica che i versori $\hat{\mathbf{i}}_{orb}$, $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ sono complanari. Quindi, tenendo presente la Figura 4.5 si ha:

$$\cos \zeta = \cos (\alpha_v - \alpha) \quad (4.31)$$

Questo risultato permette di rimuovere la dipendenza da ζ all'interno dell'espressione dell'indice J . L'altra condizione necessaria è fornita da $\partial J / \partial \alpha = 0$. Sostituendo la (4.30) e (4.31) nella (4.29) si ottiene la seguente equazione non lineare nella variabile α :

$$- \cos \alpha [2 \sin \alpha \cos (\alpha - \alpha_v) + \cos \alpha \sin (\alpha - \alpha_v)] + f \sin (\alpha - \alpha_v) \left[3 (2 - \sigma_n - \sigma_t) \cos^2 (\alpha - \alpha_v) + 2 \sigma_n \left(\frac{v_b}{v} \right) \cos (\alpha - \alpha_v) + \sigma_t \right] = 0 \quad (4.32)$$

Una volta risolta numericamente, l'equazione (4.32) fornisce il valore dell'angolo di cono della vela che rende stazionario il funzionale J . Ovviamente, questo valore risulta funzione dell'angolo di cono della velocità (α_v), delle proprietà aero-termodinamiche della vela solare (σ_n , σ_t e v_b/v) e del parametro f . In particolare, quando $f = 0$ ovvero quando si trascura la resistenza aerodinamica sulla vela, l'equazione (4.32) può essere risolta in forma chiusa e fornisce il ben noto angolo di cono quasi-ottimo per una vela ideale senza perturbazioni esterne^[12;41]:

$$\alpha_{(f=0)} = \arctan \left(\frac{-3 \cos \alpha_v + \sqrt{8 + \cos^2 \alpha_v}}{4 \sin \alpha_v} \right) \quad (4.33)$$

Si supponga ora che sia $f \neq 0$, cioè che sia presente la perturbazione aerodinamica sulla vela. Si osservi che un punto generico (α, α_v) che risulta soluzione dell'equazione (4.32) corrisponde ad un massimo assoluto di J a patto che $J(\alpha, \alpha_v) \geq 0$, una volta soddisfatta la condizione di convessità. L'insieme \mathcal{S} dei punti che massimizzano J , cioè $\mathcal{S} = \{\partial J/\partial \alpha = 0 \cap J \geq 0\}$, è rappresentato nella Figura 4.7 per differenti valori del parametro f . Un punto appartenente a \mathcal{S} sarà indicato con $(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_v)$. La Figura 4.7 mostra che la regione del piano (α, α_v) dove J risulta positivo tende a diventare sempre più piccola all'aumentare di f . Si osservi che \mathcal{S} contiene il punto $P^* \equiv (\alpha^*, \alpha_v^*)$ in corrispondenza del quale entrambe le condizioni $\partial J/\partial \alpha = 0$ e $J = 0$ sono verificate. Questo punto può essere trovato osservando che $\cos \zeta = 0$ implica anche $C_D = 0$, e quindi $J = 0$ (cfr. le equazioni (4.20) e (4.28)). In altri termini l'equazione $J = 0$ è soddisfatta dalle coppie (α, α_v) tali che

$$\alpha = \alpha_v - \pi/2 \quad (4.34)$$

Sostituendo l'equazione (4.34) nella (4.32) e risolvendo rispetto alla variabile α si ottengono i valori $\alpha = \alpha^*$ che annullano contemporaneamente sia J che $\partial J/\partial \alpha$. Il risultato è:

$$\alpha^* = \arccos \sqrt{f \sigma_t} \quad (4.35)$$

da cui

$$\alpha_v^* = \alpha^* + \pi/2 \quad (4.36)$$

La presenza del punto critico P^* ha una chiara interpretazione fisica. Infatti il funzionale J è la somma della potenza specifica dovuta alla vela solare (positiva poiché si sta incrementando la distanza dal centro di attrazione terrestre) e della potenza specifica dovuta alla resistenza aerodinamica (negativa per definizione). Quando $\alpha > \alpha^*$, il modulo della potenza dovuta alla resistenza è più grande della potenza propulsiva. In questo caso \dot{E} può essere massimizzata solamente scegliendo quel particolare valore dell'angolo di cono che rende $J = 0$. Si osservi che i valori dell'angolo di cono che rappresentano le soluzioni dell'equazione (4.32) possono essere negativi, e quindi al di fuori dell'intervallo di variazione ammissibile per α . Questo accade quando l'insieme \mathcal{S} contiene il punto $P_0 \equiv (0, \alpha_{v_0})$, con $\alpha_{v_0} > 0$. Per calcolare le condizioni in corrispondenza delle quali ciò accade basta sostituire $\alpha = 0$ nell'equazione (4.32) ottenendo il seguente polinomio del secondo ordine nella variabile $\cos \alpha_{v_0}$:

$$3f(2 - \sigma_n - \sigma_t) \cos^2 \alpha_{v_0} + 2f\sigma_n \left(\frac{v_b}{v}\right) \cos \alpha_{v_0} + f\sigma_t - 1 = 0 \quad (4.37)$$

Una soluzione α_{v_0} del polinomio riportato nell'equazione precedente (nell'intervallo $\alpha_{v_0} \in$

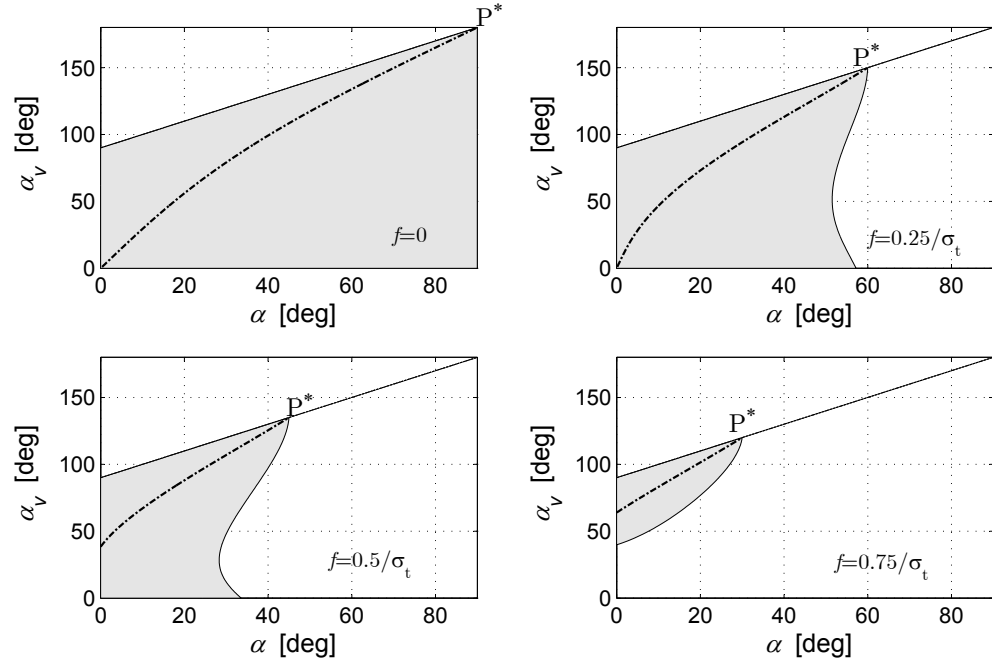


Figura 4.7: Regione del piano (α, α_v) dove $J = 0$ (linea continua), $J > 0$ (in grigio), ed i corrispondenti massimi di J (insieme \mathcal{S} , linea tratto-punto) per differenti valori di f .

$(0, \pi/2)$) esiste nel caso in cui $0 < h < 1$ avendo posto

$$h \triangleq \frac{-f \sigma_n v_b / v + \sqrt{(f \sigma_n v_b / v)^2 + 3f(1 - f \sigma_t)(2 - \sigma_n - \sigma_t)}}{3f(2 - \sigma_n - \sigma_t)} \quad (4.38)$$

con $\alpha_{v_0} = \arccos h$. Si osservi a tal proposito che l'equazione (4.38) risulta funzione della variabile f . Quindi, ponendo $h = 1$ e $h = 0$ si ottengono rispettivamente il valore minimo (f_1) e massimo (f_2) del parametro f che soddisfano la disuguaglianza $0 < h < 1$, ovvero

$$f_1 = \frac{1}{\sigma_t \left[3 \left(\frac{2}{\sigma_t} - \frac{\sigma_n}{\sigma_t} - 1 \right) + 2 \frac{\sigma_n v_b}{\sigma_t v} + 1 \right]} \quad (4.39)$$

e

$$f_2 = \frac{1}{\sigma_t} \quad (4.40)$$

Si può facilmente verificare che, quando $0 < h < 1$, il massimo valore dell'indice J è $J(0, \alpha_{v_0})$.

Riassumendo, la legge di controllo quasi ottima è la seguente, ricordando che con $\tilde{\alpha}$ è stata indicata la soluzione dell'equazione (4.32):

Caso 1: $0 \leq f < f_1$

$$\alpha = \begin{cases} \tilde{\alpha} & \text{se } 0 \leq \alpha_v < \alpha_v^* \\ \alpha_v - \pi/2 & \text{se } \alpha_v > \alpha_v^* \end{cases} \quad (4.41)$$

Caso 2: $f_1 \leq f \leq f_2$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \alpha_v \leq \arccos h \\ \tilde{\alpha} & \text{se } \arccos h < \alpha_v < \alpha_v^* \\ \alpha_v - \pi/2 & \text{se } \alpha_v > \alpha_v^* \end{cases} \quad (4.42)$$

Caso 3: $f > f_2$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \alpha_v \leq \pi/2 \\ \alpha_v - \pi/2 & \text{se } \alpha_v > \pi/2 \end{cases} \quad (4.43)$$

Si osservi che il Caso 3 non è di interesse pratico poiché, essendo σ_t tipicamente variabile nell'intervallo $[0.8, 0.9]^{[55]}$, l'equazione (4.40) indica che solitamente $f_2 > 1$. Come precedentemente dimostrato, questo corrisponde ad una situazione in cui la vela solare si trova al di sotto della quota minima operativa. Inoltre si noti che la legge di controllo così ricavata risulta compatibile con quella, nota in letteratura, relativa all'assenza di perturbazione atmosferica. Infatti quando $f = 0$ (cioè $C_D = 0$) si ottiene dalla Figura 4.7 che $\alpha^* = \pi/2$, ovvero che l'angolo di cono assume il suo valore massimo consentito. In altri termini la legge di controllo (4.41) coincide, in tutto l'intervallo di variazione di α , con la soluzione dell'equazione (4.32) fornita dall'equazione (4.33).

La legge di controllo quasi ottima risulta più chiara osservando la Figura 4.8.

4.3.3 Simulazioni ed analisi dei risultati

La legge di controllo discussa precedentemente è stata applicata nella simulazione di traiettorie di innalzamento orbitale per una vela solare convenzionale con modello di forza ideale. Le equazioni del moto (4.1) e (4.17) sono state integrate in doppia precisione utilizzando un metodo di Adams-Bashforth-Moulton a passo variabile^[34] con una tolleranza assoluta e relativa di 10^{-10} . Anche in questo caso è stato utilizzato un insieme di unità canoniche (cfr. §4.2.3) DU_\oplus per la distanza e TU_\oplus per il tempo. Sono state anche in questo caso considerate le perturbazioni dovute all'attrazione luni-solare^[45], e la non perfetta sfericità del campo gravitazionale terrestre^[46] fino all'armonica J_6 . Le effemeridi geocentriche del Sole e della Luna utilizzate sono basate sul modello^[48;49] JPL DE200/LE200. Questo ha permesso di tenere in conto la variazione temporale della pressione di radiazione solare dovuta all'eccentricità dell'orbita eliocentrica della Terra.

Per evitare^[53] il problema legato all'ombra proiettata dalla Terra, è stata assunta un'orbita iniziale eliosincrona circolare avente quota 650 km ed inclinazione 96.6 deg. L'ascensione retta del nodo ascendente e l'argomento del perigeo sono stati scelti in maniera

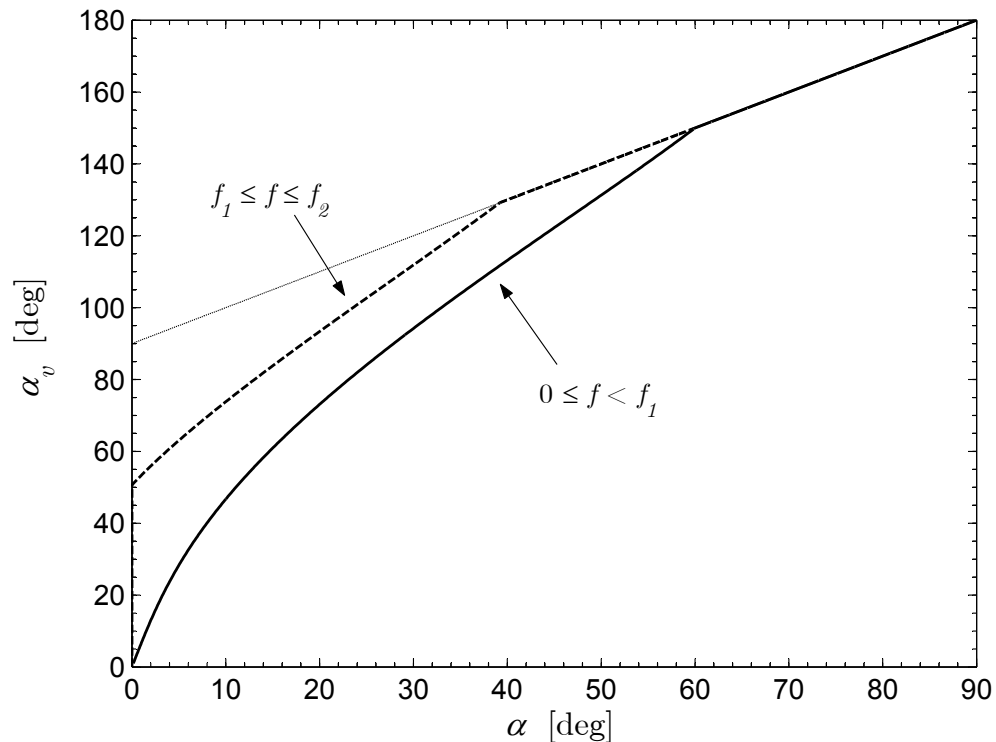


Figura 4.8: Legge di controllo quasi-ottima per l'angolo di cono nei due casi descritti dalle equazioni (4.41) (linea continua) e (4.42) (linea tratteggiata)

tale da massimizzare, all'istante della partenza, l'illuminazione del piano orbitale da parte del Sole. Si osservi che la quota di partenza è compatibile con la quota minima operativa (approssimativamente pari a 600 km) per una vela solare ideale sotto condizioni di attività solare e geomagnetica media (cfr. Figura 4.6). I coefficienti di accomodamento, per un'analisi di prima stima^[55], sono stati assunti pari a $\sigma_n = \sigma_t = 0.8$.

Il problema che è stato investigato riguarda il raddoppio della quota iniziale del veicolo spaziale attraverso l'utilizzo della legge di controllo quasi-ottima (4.41)–(4.43). Le simulazioni effettuate hanno mostrato che la data di inizio missione ha effetti trascurabili sul tempo di missione. Questa conclusione è in accordo con alcuni risultati precedentemente ricavati in letteratura^[51;35]. In base a questa considerazione è stata scelta come data di partenza per le simulazioni l'equinozio di primavera dell'anno 2005 (21 Marzo 2005) mentre per l'ascensione retta del nodo ascendente è stato assunto un valore di 90 deg.

Il problema è stato prima risolto per il caso ideale di assenza di perturbazioni aerodinamiche (cioè $f = 0$), utilizzando differenti accelerazioni caratteristiche scelte nell'intervallo $[0.1, 2]$ mm/s². I corrispondenti tempi di missione, indicati con il termine Δt_i , sono stati riportati in Figura 4.9. La stessa missione di raddoppio della quota iniziale è stata in seguito simulata nuovamente tenendo in conto però le perturbazioni dovute alla resistenza atmosferica. Sono stati presi in considerazione due casi: nel Caso 1 è stata applicata la

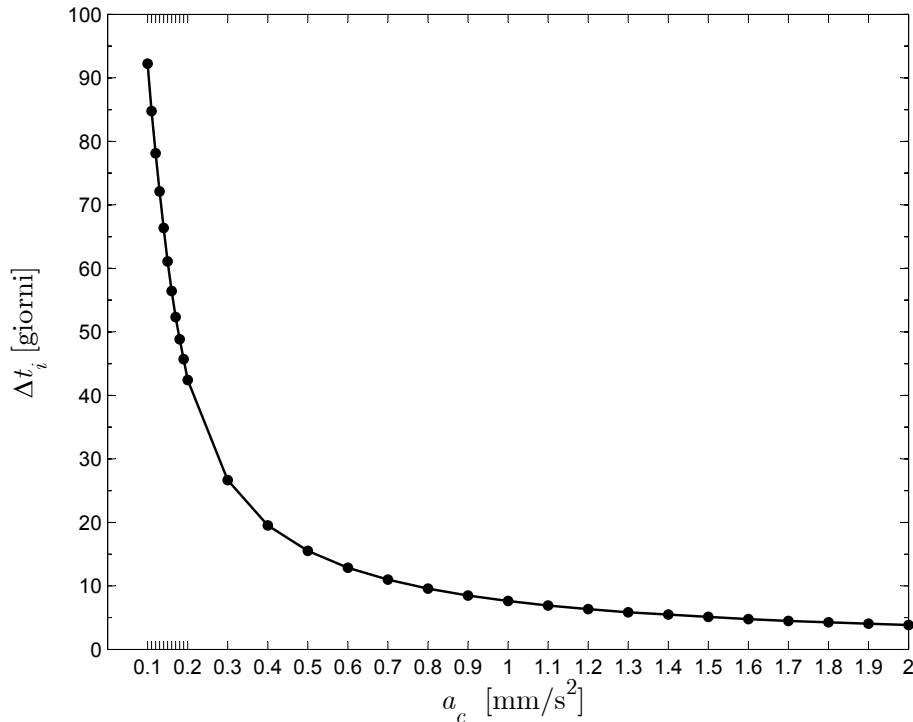


Figura 4.9: Intervallo di tempo necessario a raddoppiare la quota iniziale (650 km) della vela solare convenzionale con modello di forza ideale trascurando la resistenza atmosferica.

legge di controllo quasi ottima (4.41)–(4.43), mentre nel Caso 2 è stata utilizzata la legge di controllo ideale (4.33) con l’inclusione nel modello della dinamica anche delle perturbazioni dovute alla resistenza atmosferica (cioè $\mathbf{a}_d \neq 0$ nelle equazioni del moto). La Figura 4.10 mostra l’incremento del tempo di missione, in percentuale, rispetto al caso ideale di assenza di resistenza. In entrambi i casi 1 e 2, il tempo di missione aumenta in maniera significativa per ogni accelerazione caratteristica analizzata. Come era prevedibile, nel Caso 2 (quello non quasi-ottimo) i tempi di missione sono più grandi di quelli relativi al Caso 1. A titolo di esempio, assumendo un’accelerazione caratteristica $a_c = 1 \text{ mm/s}^2$, nella Figura 4.11 sono state riportate le storie temporali dell’angolo di cono α ottenute nel caso quasi-ottimo in presenza ed in assenza della resistenza atmosferica (utilizzando l’equazione (4.33), ovvero ponendo rispettivamente $f \neq 0$ ed $f = 0$).

Visto che la legge di controllo quasi-ottima (4.41)–(4.43) massimizza istantaneamente la variazione temporale dell’energia meccanica specifica, questa può essere applicata anche per lo studio delle traiettorie di fuga dalla Terra partendo da orbite di tipo LEO. La Figura 4.12 mostra il confronto tra i tempi di fuga utilizzando la legge di controllo quasi-ottima sia ponendo $f = 0$ che $f \neq 0$. Nella Figura 4.12 sono stati anche riportati i tempi di fuga ottenuti utilizzando l’espressione analitica approssimata proposta da McInnes^[12] e valida in assenza di perturbazioni esterne (compresa quindi anche la resistenza). Si osservi a tal proposito che l’inclusione della resistenza aerodinamica produce effetti trascurabili sul

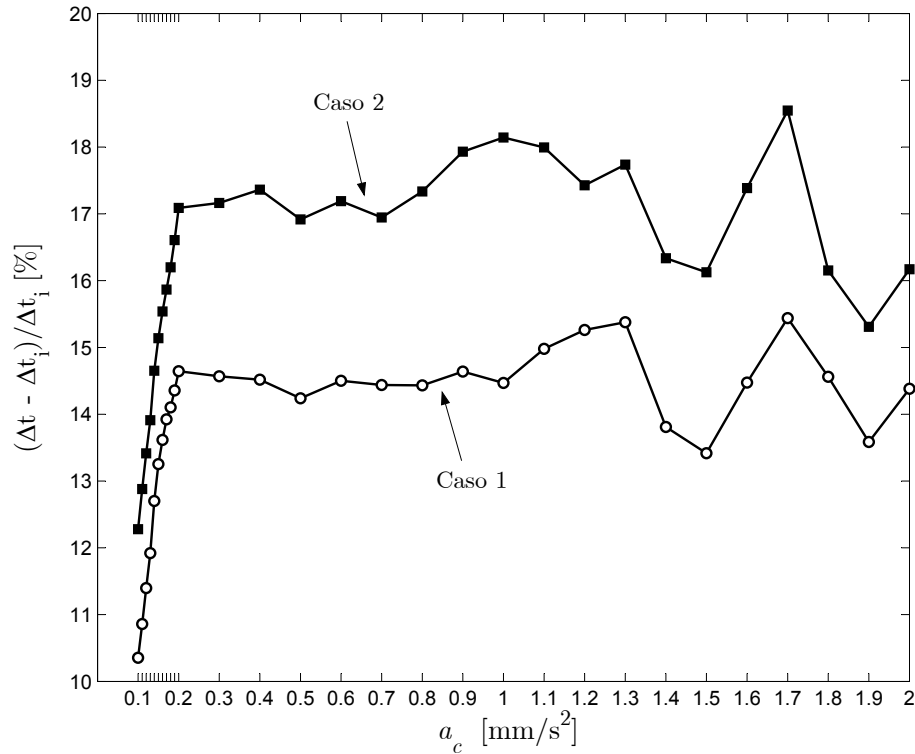


Figura 4.10: Intervallo di tempo necessario a raddoppiare la quota iniziale (650 km) utilizzando la legge di controllo quasi ottima (4.41)–(4.43) (linea con cerchi, Caso 1) e utilizzando la legge di controllo ideale (4.33) con la presenza degli effetti perturbativi della resistenza aerodinamica (linea con i quadrati, Caso 2).

calcolo del tempo di fuga rispetto al caso ideale. Infatti la vela solare opera la maggior parte del tempo di missione sostanzialmente in assenza di perturbazione aerodinamica in quanto si trova in zone dello spazio in cui la densità atmosferica è praticamente trascurabile ($f \cong 0$). Questo è confermato dalla Figura 4.13, dove è stata riportata la storia temporale del parametro f durante una traiettoria di fuga con partenza da orbita bassa. La Figura 4.13 mostra chiaramente che il parametro f è significativamente diverso da zero solo nei primi 15 giorni della missione di fuga, su un tempo totale di 204 giorni.

4.4 Conclusioni

In questo Capitolo sono state studiate le traiettorie di fuga dalla Terra con partenza da orbita GTO e da orbita bassa considerando una vela convenzionale ed una vela composta con modello di forza ideale. La strategia di controllo utilizzata è quasi-ottima dal punto di vista del tempo totale di missione e consiste nel massimizzare istantaneamente la variazione temporale dell'energia meccanica specifica. La legge di controllo così ottenuta risulta estremamente semplice nella sua implementazione e permette di simulare velocemente e con un volume di calcolo contenuto una traiettoria di fuga.

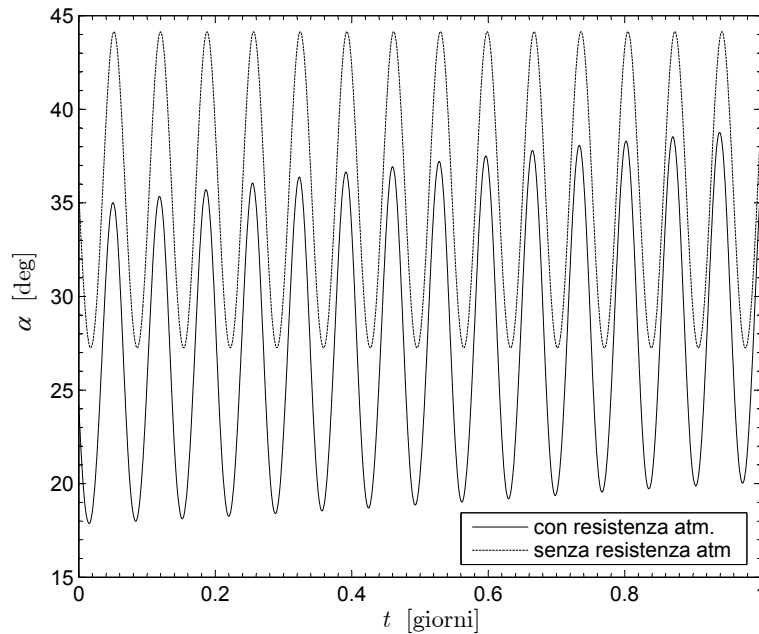


Figura 4.11: Storie temporali dell'angolo di cono della vela nel caso di legge quasi-ottima con e senza la perturbazione dovuta alla resistenza aerodinamica ($a_c = 1 \text{ mm/s}^2$).

Per quel che riguarda le traiettorie con partenza da orbita GTO è stato osservato che l'uso di una vela composta ideale comporta una riduzione dei tempi di missione dell'ordine del 15% rispetto ad una vela convenzionale con lo stesso modello di forza ideale. L'analisi condotta ha tenuto conto delle principali fonti perturbative come l'attrazione luni-solare, la non perfetta sfericità del campo gravitazionale terrestre e l'effetto dovuto all'ombra proiettata dalla Terra. Le simulazioni hanno anche chiaramente indicato che il tempo di missione è fortemente influenzato dalle condizioni di illuminazione della vela durante l'ultima parte della traiettoria, poco prima cioè di raggiungere le condizioni di fuga.

Per quel che riguarda invece le traiettorie di innalzamento orbitale e di fuga con partenza da orbita bassa, è stata sviluppata una legge di controllo quasi-ottima che tiene in conto anche della presenza perturbativa della resistenza aerodinamica residua. La legge di controllo come nel caso precedente, massimizza la variazione istantanea dell'energia meccanica specifica della vela e quindi della variazione temporale del semiasse maggiore dell'orbita. Lo studio effettuato ha dimostrato che la legge di controllo è fortemente influenzata dalle caratteristiche dell'atmosfera attraverso il rapporto tra la pressione dinamica locale e la pressione di radiazione solare agente sulla vela. Sono state simulate una serie di traiettorie di innalzamento orbitale e di fuga tenendo conto, oltre alla resistenza atmosferica, anche l'attrazione luni-solare e la non perfetta sfericità del campo gravitazionale terrestre. Se per quel che riguarda i tempi di fuga non è stata evidenziata un'apprezzabile differenza tra il caso di presenza e di assenza di resistenza atmosferica,

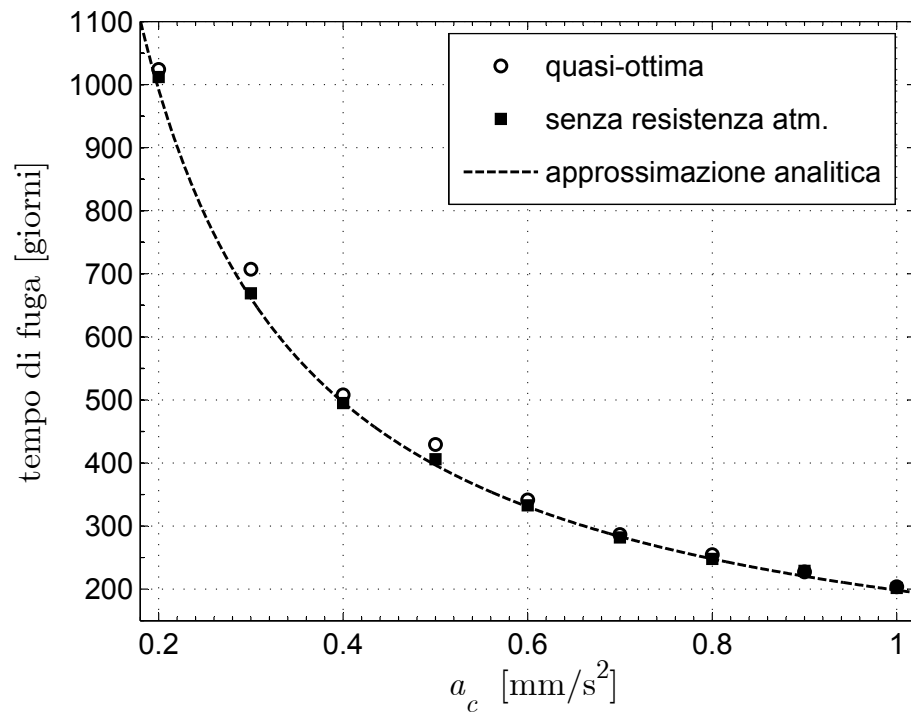


Figura 4.12: Tempi di fuga con partenza da orbita bassa utilizzando la legge di controllo quasi-ottima in assenza (quadrati) ed in presenza (cerchi) della resistenza atmosferica. Con una linea tratteggiata è stata indicata la soluzione analitica approssimata derivata da McInnes^[12].

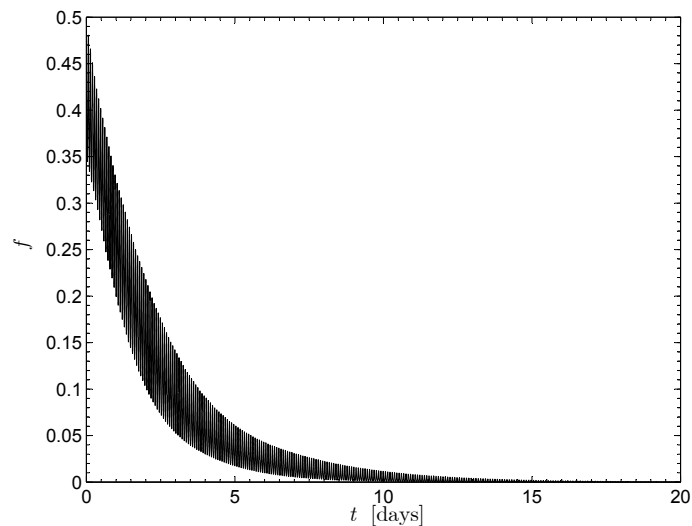


Figura 4.13: Storia temporale della variabile f in una traiettoria di fuga con partenza da orbita bassa ($a_c = 1 \text{ mm/s}^2$).

invece per i tempi necessari a raddoppiare ad esempio la quota iniziale è stato riscontrato un non trascurabile incremento.

5

Missioni con Vele Solari ad Alte Prestazioni

5.1 Introduzione

L'utilizzo di una vela solare come sistema propulsivo principale rende possibile lo studio e la progettazione di tutta una serie di missioni spaziali^[7] altrimenti precluse ad altri apparati propulsivi considerati comunemente "convenzionali". I continui miglioramenti tecnologici nell'ideazione di materiali adatti alla realizzazione di una vela solare fanno sperare che entro alcune decine di anni si sia in grado di ottenere delle accelerazioni caratteristiche (nel caso ideale) dell'ordine di 6 mm/s^2 , tali cioè da controbilanciare (e addirittura superare) l'accelerazione attrattiva solare. Quando l'accelerazione propulsiva generata dalla vela solare, dovuta alla pressione di radiazione solare, bilancia esattamente l'accelerazione di gravità dovuta al Sole, la vela è in grado di assumere delle posizioni di riposo (velocità assoluta nulla) in ogni punto dello spazio interplanetario. Questa *condizione di eliostazionarietà* è alla base di numerose missioni scientifiche attualmente in fase di studio come ad esempio l'osservazione della struttura del campo magnetico e dei poli del Sole, altrimenti non visibili da posizioni appartenenti al piano dell'eclittica. Missioni di questo tipo potrebbero anche fornire delle preziose informazioni sulla corona del Sole e sulla fisica del vento solare. Inoltre sarebbero possibili delle missioni di monitoraggio degli asteroidi orbitanti nelle vicinanze della Terra.

Nonostante il fatto che le possibili applicazioni pratiche di una missione verso una condizione di eliostazionarietà siano noti da tempo, il problema di calcolare una opportuna orbita di trasferimento a partire dall'orbita terrestre verso suddetti punti dello spazio interplanetario non è stato ancora risolto in maniera soddisfacente. In un suo recente articolo^[57], McInnes ha derivato una legge di controllo analitica capace di trasferire (in un problema piano) una vela solare convenzionale con modello di forza ideale da un'orbita kepleriana circolare di raggio assegnato ad un punto di eliostazionarietà posto alla stessa

distanza dal Sole. In questo Capitolo il problema del raggiungimento della condizione di eliostazionarietà verrà trattato dal punto di vista del controllo ottimo calcolando i tempi minimi di trasferimento a partire da un'orbita circolare e da un'orbita ellittica, come quella della Terra e di Marte attorno al Sole.

5.2 Condizione di eliostazionarietà

Un'interessante applicazione della vela solare ad alte prestazioni, come già accennato nell'introduzione a questo Capitolo, è costituita dalla possibilità di realizzare delle traiettorie rettilinee all'interno del Sistema Solare o addirittura di fermarsi in un punto fisso dello spazio, raggiungendo cioè la cosiddetta condizione di eliostazionarietà. In questa condizione il veicolo spaziale si trova nel punto prescelto con velocità assoluta nulla e sfrutta la pressione di radiazione per bilanciare l'attrazione gravitazionale solare come indicato schematicamente in Figura 5.1. La condizione di eliostazionarietà tuttavia può essere man-

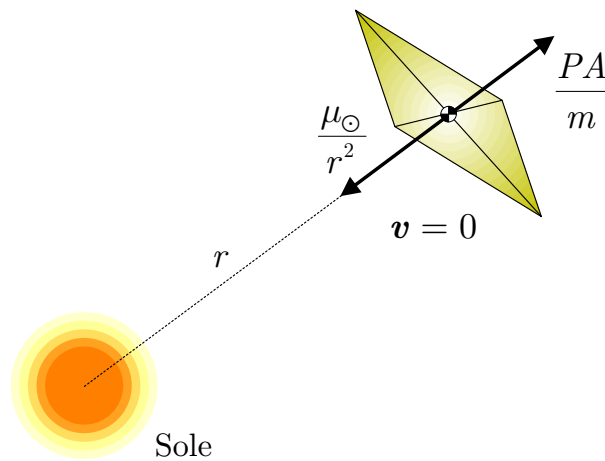


Figura 5.1: Condizione di eliostazionarietà raggiunta utilizzando una vela solare.

tenuta esclusivamente da delle vele aventi un ben preciso valore del parametro di snellezza β (cfr. §2.3). Infatti imponendo il bilanciamento tra l'accelerazione dovuta alla pressione di radiazione e quella legata all'attrazione gravitazionale solare per una vela generica avente i coefficienti di forza b_1 , b_2 e b_3 (si vedano le equazioni (2.10)–(2.12)) si ottiene:

$$\frac{\mu_{\odot}}{r^2} = \frac{\beta \mu_{\odot} (b_1 + b_2 + b_3)}{2r^2} \Rightarrow \beta = \frac{2}{b_1 + b_2 + b_3} \quad (5.1)$$

Dall'equazione (5.1) si osserva che β è indipendente dalla distanza r a cui si vuole ottenere la condizione di eliostazionarietà e che quindi è possibile raggiungere, in linea teorica e non considerando i vincoli imposti dalla temperatura di esercizio, tale condizione ad una distanza qualsiasi dal Sole, a patto di realizzare la vela solare con il parametro di snellezza

richiesto.

A tal proposito è bene notare che nel caso più favorevole di vela solare ideale ($b_1 + b_2 + b_3 = 2$ come si osserva dalla Tabella 2.1) il parametro di snellezza assume un valore unitario: questo corrisponde ad utilizzare una vela avente un'accelerazione caratteristica di circa $a_c = 5.95 \text{ mm/s}^2$ con un conseguente carico della vela (si ricordi che il carico della vela è il rapporto tra la superficie riflettente e la massa totale del veicolo spaziale) pari a $\sigma = 1.53 \text{ g/m}^2$.

Questo valore è ben al di là delle prestazioni tipiche delle vele solari sia attualmente in fase di sviluppo^[1] o delle prestazioni stimate per le vele di prossima realizzazione^[11] e rende quindi le missioni eliostazionarie una prerogativa assoluta delle future vele ad alte prestazioni^[7;58] solitamente indicate con l'acronimo HPSS (*High Performance Solar Sail*).

5.3 Missioni eliostazionarie di minimo tempo

In questa sezione si affronta il problema di determinare il tempo minimo di trasferimento t_f di una HPSS di caratteristiche assegnate da un'orbita di parcheggio ellittica, con semiasse maggiore a ed eccentricità e note, ad un punto dello spazio a cui corrisponde una condizione di eliostazionarietà. A tale scopo, come nei Capitoli precedenti, verrà utilizzato un metodo indiretto e quindi verrà risolto un problema variazionale classico.

5.3.1 Equazioni del moto

Avendo già affrontato nel Capitolo 3 la soluzione di un problema variazionale analogo utilizzando un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale, in questa sezione si è preferito utilizzare un sistema di riferimento polare $\mathcal{T}_\odot(r, \theta)$ di versori $\hat{\mathbf{i}}_r$ ed $\hat{\mathbf{i}}_\theta$, per dimostrare come le leggi di controllo ottime (cfr. §3.4) possano essere applicate anche ad un problema strettamente bidimensionale.

Le equazioni del moto del HPSS nel sistema di riferimento $\mathcal{T}_\odot(r, \theta)$ sono le seguenti (si veda la Figura 5.2):

$$\dot{r} = u \quad (5.2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r} \quad (5.3)$$

$$\dot{u} = \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + a_r \quad (5.4)$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r} + a_\theta \quad (5.5)$$

dove r , θ , u , v , μ , a_r , a_θ indicano rispettivamente la distanza dal Sole, l'anomalia o ascissa angolare misurata in senso antiorario a partire da una direzione di riferimento x

fissa, la velocità radiale, la velocità circonferenziale, il parametro gravitazionale del Sole, l'accelerazione radiale e circonferenziale del veicolo spaziale.

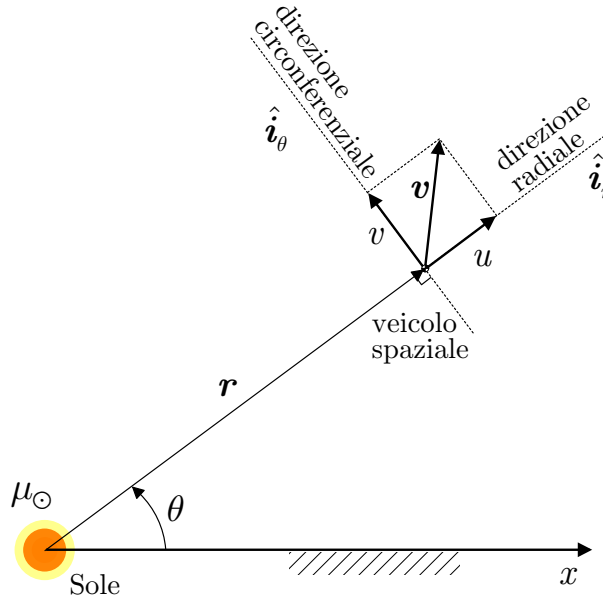


Figura 5.2: Sistema di riferimento polare.

5.3.2 Accelerazione della vela

In questo Capitolo vengono considerate due classi di vela solare: convenzionale ed SPT^[13;59]. Inoltre per la vela convenzionale vengono considerati tre modelli di forza^[12], come nel Capitolo 2: ideale, ottico e parametrico.

Viene di seguito presentata una trattazione comune a tutti e quattro questi modelli di vela ottenendo in questo modo un'espressione generale dell'accelerazione dovuta alla pressione di radiazione solare:

$$a_r = \frac{\beta \mu}{2 r^2} \cos^{(p-q)} \alpha \left[(1-q) b_1 + \left(q b_1 + b_2 \cos^{(3q+1)} \alpha + b_3 \cos^{2q} \alpha \right) \cos \alpha \right] \quad (5.6)$$

$$a_\theta = \frac{\beta \mu}{2 r^2} \cos^{(p-q)} \alpha \sin \alpha \left(q b_1 + b_2 \cos^{(3q+1)} \alpha + b_3 \cos^{2q} \alpha \right) \quad (5.7)$$

Nelle equazioni (5.6)-(5.7) il parametro p viene utilizzato per definire la classe della vela, corrispondendo $p = 1$ alla vela convenzionale e $p = 0$ alla vela SPT ideale, avente cioè con una superficie perfettamente riflettente. Inoltre l'indice q e i coefficienti b_1 , b_2 , b_3 indicano il modello di forza (ideale, ottico e parametrico) utilizzato per descrivere il comportamento della vela convenzionale.

Tutti questi coefficienti sono stati riportati sinteticamente nella Tabella 5.1 dove, per quel che riguarda i termini b_1 , b_2 e b_3 , sono stati utilizzati i risultati relativi alla vela JPL *Square*

Sail i cui dati sono stati ricavati dal Jet Propulsion Laboratory di Pasadena (California) durante lo studio preliminare^[16;17] di una missione scientifica verso la cometa di Halley (cfr. §2.5.2 e §2.5.3). Si osservi che i valori riportati nella Tabella 5.1 sono compatibili

	Convenzionale			SPT
	ideale	ottico	parametrico	
p	1	1	1	0
q	0	0	1	0
b_1	0	0.1728	-0.5885	0
b_2	2	1.6544	-0.1598	2
b_3	0	-0.0109	2.5646	0

Tabella 5.1: Coefficienti di forza della vela (derivati dal modello JSS).

con quelli che compaiono nelle Tabelle 2.1 e 2.2.

Infine la variabile α indica l'angolo di controllo caratteristico della vela. Quest'ultimo può essere definito nella maniera seguente, come risulta dall'analisi della Figura 5.3:

- l'angolo formato dal versore normale alla vela $\hat{\mathbf{n}}$ con la direzione dei raggi solari incidenti $[\hat{\mathbf{r}}]_{\mathcal{T}_\odot} \triangleq [1, 0]^T$ per il caso di vela convenzionale con modello di forza ideale e ottico;
- l'angolo formato dal versore dell'accelerazione $[\hat{\mathbf{a}}]_{\mathcal{T}_\odot} \triangleq [a_r, a_\theta]^T / \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$ con la direzione dei raggi solari nel caso di vela convenzionale con modello parametrico per vela di tipo SPT ideale. In quest'ultimo caso α coincide con l'angolo formato dal versore normale allo specchio direttore con la direzione della radiazione incidente.

L'intervallo di variazione ammissibile \mathcal{U} dell'angolo di controllo α è in generale diverso nelle vele considerate e viene di seguito riassunto in un'unica espressione:

$$\mathcal{U} \rightarrow \alpha \in \left[0, \frac{(1-q)\pi}{2} + q\alpha^* \right] \quad (5.8)$$

essendo (cfr. §2.7) α^* il valore massimo dell'angolo di controllo per il modello di forza parametrico dato dall'espressione:

$$\alpha^* \triangleq \arccos \left(\sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_2b_1}}{2b_2}} \right) \quad (5.9)$$

5.3.3 Formulazione del problema variazionale

Determinare le traiettorie di minimo tempo per raggiungere la condizione di eliostazionarietà corrisponde ad individuare la storia temporale dell'angolo di controllo $\alpha = \alpha(t)$ che permette di trasferire il veicolo spaziale da uno stato iniziale $(r_0, \theta_0, u_0, v_0)$ assegnato (e

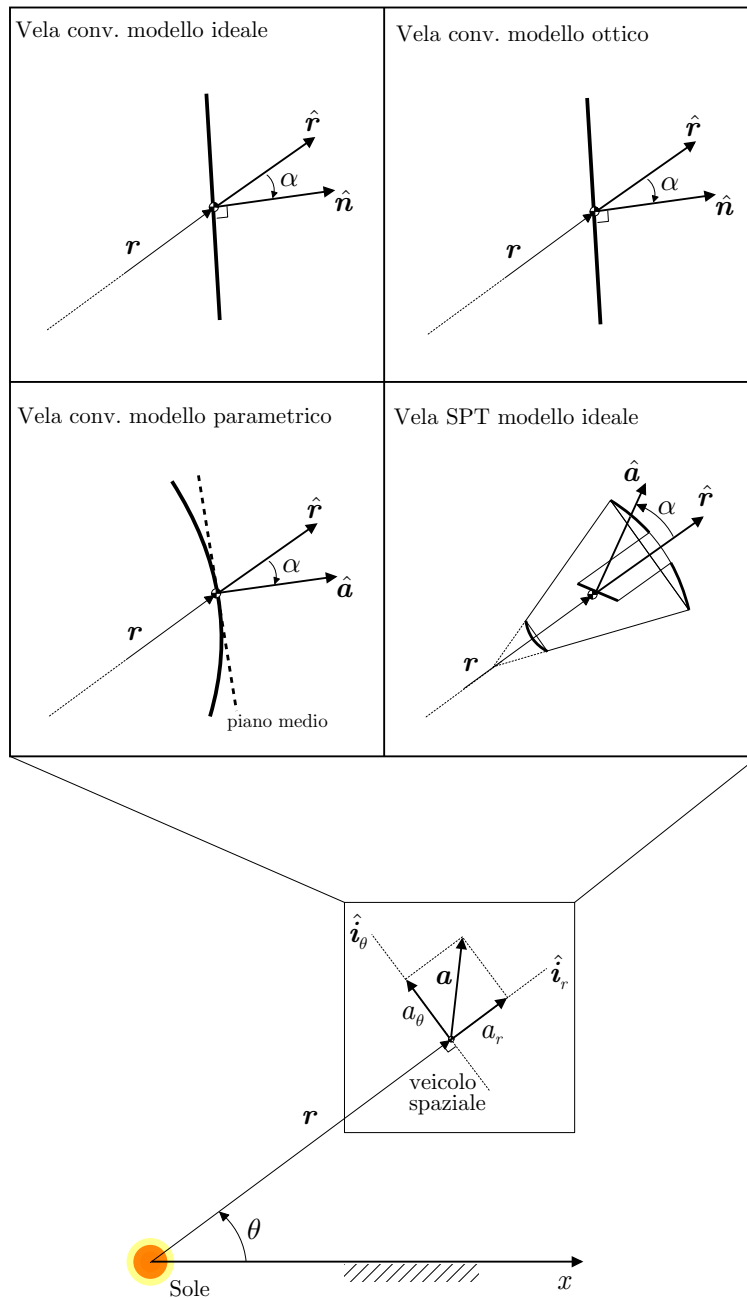


Figura 5.3: Definizione dell'angolo di controllo α .

dipendente dall'orbita di parcheggio) ad uno finale ($r_f, \theta_f, u_f = 0, v_f = 0$) massimizzando il funzionale

$$J = -t_f \tag{5.10}$$

Tenendo conto delle equazioni del moto (5.2)–(5.5), si ottiene per il problema in esame una funzione Hamiltoniana data da

$$H = \lambda_r u + \lambda_\theta \frac{v}{r} + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + a_r \right) + \lambda_v \left(-\frac{u v}{r} + a_\theta \right) \quad (5.11)$$

dove λ_r , λ_θ , λ_u e λ_v sono le variabili aggiunte associate rispettivamente alla variabile di stato r , θ , u e v .

Le derivate temporali delle variabili aggiunte sono fornite come al solito dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\dot{\lambda}_r = \frac{\lambda_\theta v}{r^2} + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3} - \frac{\partial a_r}{\partial r} \right) - \lambda_v \left(\frac{u v}{r^2} + \frac{\partial a_\theta}{\partial r} \right) \quad (5.12)$$

$$\dot{\lambda}_\theta = 0 \quad (5.13)$$

$$\dot{\lambda}_u = -\lambda_r + \lambda_v \frac{v}{r} \quad (5.14)$$

$$\dot{\lambda}_v = -\frac{\lambda_\theta}{r} - 2\frac{\lambda_u v}{r} + \frac{\lambda_v u}{r} \quad (5.15)$$

$$(5.16)$$

e costituiscono, insieme alle equazioni del moto, un sistema di 8 equazioni differenziali scalari del primo ordine non lineari nelle variabili $r, \theta, u, v, \lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_u, \lambda_v$.

Il sistema differenziale può essere leggermente semplificato osservando, dalla (5.13), che la variabile aggiunta λ_θ rimane costante nel tempo. Indicando con $\lambda_\theta(t_f)$ il suo valore all'istante finale si ha in questo modo:

$$\lambda_\theta = \lambda_\theta(t_f) \quad (5.17)$$

5.3.4 Condizioni al bordo

Il sistema differenziale ottenuto precedentemente deve essere completato imponendo le opportune condizioni al bordo. Si supponga a tal proposito che il veicolo spaziale si trovi inizialmente su di una generica orbita di parcheggio eliocentrica avente semiasse maggiore a ed eccentricità e assegnati come indicato in Figura 5.4.

Utilizzando un sistema di unità canoniche così definito $\text{DU} \triangleq a$ e $\text{TU} \triangleq \sqrt{a^3/\mu}$ (avendo così $\mu = 1 \text{ DU}^3/\text{TU}^2$) e supponendo che l'anomalia iniziale θ_0 coincida con l'anomalia vera iniziale del veicolo sulla sua orbita di parcheggio (questo equivale a fissare la direzione x con la direzione del vettore eccentricità iniziale \mathbf{e}), si ottengono le seguenti condizioni all'istante iniziale $t_0 \equiv 0$:

$$r_0 = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta_0}; \quad u_0 = \frac{e \sin \theta_0}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad v_0 = \frac{1 + e \cos \theta_0}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (5.18)$$

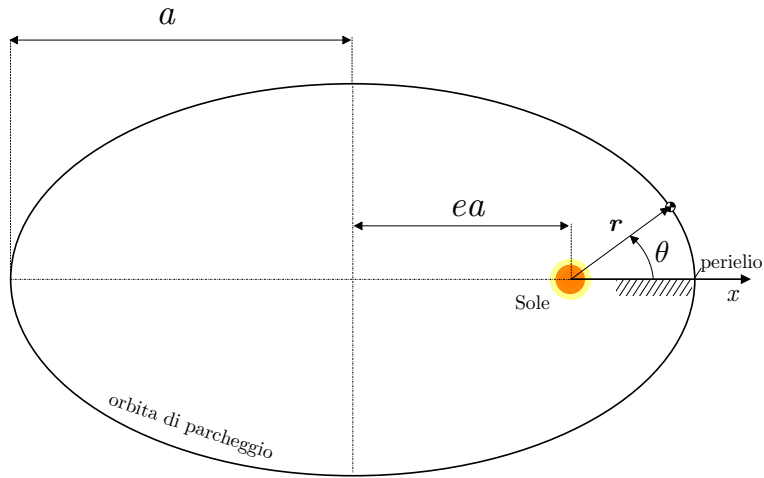


Figura 5.4: Orbita di parcheggio.

Se non si vincola sia il valore finale θ_f dell'anomalia sia la distanza eliocentrica raggiunta r_f al termine del trasferimento, si ottengono le seguenti condizioni all'istante finale t_f :

$$u_f = 0; \quad v_f = 0; \quad \lambda_r(t_f) = 0; \quad \lambda_\theta(t_f) = 0 \quad (5.19)$$

Tenendo presente che $\lambda_\theta(t_f) = 0$ e ricordando l'equazione (5.17) si ricava che, durante l'intero trasferimento, la variabile aggiunta λ_θ è sempre nulla. Alle condizioni all'istante finale appena esposte si aggiunge la condizione di trasversalità^[20] che per il problema in esame assume la forma seguente:

$$H(t_f) = 1 \quad (5.20)$$

Quest'ultima condizione completa il TPBVP fornendo una relazione che permette di individuare il tempo finale t_f .

È bene sottolineare tuttavia che il TPBVP può essere semplificato osservando che il sistema differenziale costituito dalle equazioni di Eulero-Lagrange (5.12)–(5.15) è lineare nelle variabili aggiunte $\lambda_r, \dots, \lambda_v$. Questo permette di assumere un fattore di scala nella soluzione del problema dei due punti, come ad esempio:

$$\lambda_u(t_0) = 1 \quad (5.21)$$

e di rimuovere quindi una condizione all'istante finale, come ad esempio quella data dall'equazione (5.20). Una volta risolto il TPBVP così semplificato, il valore reale del fattore di scala $\lambda_u(t_0)$ può essere determinato imponendo la condizione di trasversalità (5.20).

5.3.5 Legge di controllo ottima

La legge di controllo ottima $\alpha(t)$ si determina invocando il principio del massimo di Pontryagin. Infatti, al generico istante t , l'angolo di controllo deve essere scelto nel dominio dei controlli ammissibili \mathcal{U} (si veda a tal proposito l'equazione (5.8)) in maniera tale da massimizzare la funzione Hamiltoniana data dalla relazione (5.11).

Questo equivale a massimizzare la funzione H' che coincide con la parte dell'Hamiltoniana dipendente esplicitamente dall'angolo di controllo, e cioè:

$$\alpha = \arg \max_{\alpha \in \mathcal{U}} H \equiv \arg \max_{\alpha \in \mathcal{U}} H' \quad \text{con} \quad H' \triangleq \lambda_u a_r + \lambda_v a_\theta \quad (5.22)$$

I valori dell'angolo α che rendono stazionaria la funzione H' (cioè che soddisfano la relazione $\partial H'/\partial \alpha = 0$) sono forniti dalla seguente espressione (si veda la Figura 5.5):

$$\tan \alpha_\lambda \triangleq \frac{\lambda_v}{\lambda_u} = -\frac{\partial a_r / \partial \alpha}{\partial a_\theta / \partial \alpha} \quad (5.23)$$

dove $\alpha_\lambda \in [0, \pi]$ indica la direzione del primer vector^[26] definito come $[\boldsymbol{\lambda}]_{\mathcal{T}_\odot} \triangleq [\lambda_u, \lambda_v]^T$. L'equazione (5.23) presenta una ben nota soluzione in forma chiusa nel caso di vela con-

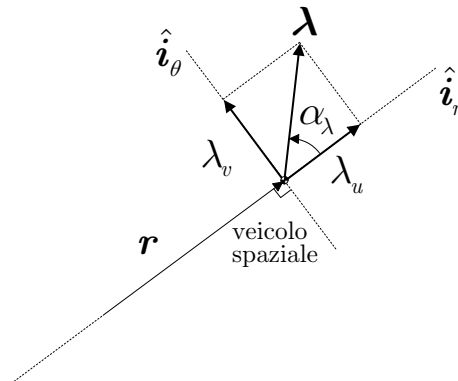


Figura 5.5: Angolo α_λ del primer vector $\boldsymbol{\lambda}$.

venzionale modello ideale^[19] ed SPT modello ideale (cfr. §3.4.1) ma deve essere risolta numericamente, utilizzando ad esempio il metodo di Newton, nel caso di vela convenzionale con modello di forza ottico e parametrico.

Si può verificare quindi che l'angolo di controllo ottimale che massimizza H , soddisfacendo quindi l'equazione (5.22), ha la seguente espressione:

$$\alpha = \begin{cases} \tilde{\alpha} & \text{se } \alpha_\lambda \in [0, \alpha_\lambda^*) \\ \frac{(1-q)\pi}{2} + q \arccos \left(\sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1 b_2}}{2b_2}} \right) & \text{se } \alpha_\lambda \in [\alpha_\lambda^*, \pi] \end{cases} \quad (5.24)$$

dove $\tilde{\alpha}$ indica la soluzione dell'equazione (5.23) mentre:

$$\alpha_\lambda^* \triangleq \begin{cases} \pi & \text{vela convenzionale mod. ideale} \\ -\arctan \left(\frac{b_1 + \cos \alpha_o (b_2 \cos \alpha_o + b_3)}{\sin \alpha_o (b_2 \cos \alpha_o + b_3)} \right) & \text{vela convenzionale mod. ottico} \\ \arccos \left(\sqrt{\frac{-b_3 + \sqrt{b_3^2 - 4b_1 b_2}}{2b_2}} \right) + \frac{\pi}{2} & \text{vela convenzionale mod. param.} \\ \pi & \text{vela SPT mod. ideale} \end{cases} \quad (5.25)$$

avendo posto per brevità di scrittura

$$\cos \alpha_o \triangleq \frac{-b_1 b_3 - 2b_2 b_3 + \sqrt{b_1^2 b_3^2 - 4b_1 b_3^2 b_2 + 8b_1^2 b_2^2 + 4b_2^3 b_1}}{4b_1 b_2 + 2b_2^2} \quad (5.26)$$

5.4 Simulazioni ed analisi dei risultati

Il sistema differenziale costituito dalle equazioni del moto (5.2)–(5.5) e dalle equazioni di Eulero-Lagrange (5.12)–(5.15) è stato integrato in doppia precisione utilizzando un metodo di Runge-Kutta del quarto ordine a passo variabile^[33;34] con una tolleranza assoluta e relativa di 10^{-10} (in unità canoniche). Il TPBVP è stato risolto utilizzando uno schema numerico ibrido basato sul metodo di Newton-Raphson^[30] e sul metodo del simplesso^[31] con una tolleranza sul raggiungimento delle condizioni finali desiderate più piccola di 10^{-10} .

Sono stati considerati alcuni valori dell'eccentricità dell'orbita di parcheggio e l'anomalia iniziale è stata scelta nell'intervallo $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ per tutti e quattro i modelli di vela sinora considerati. In particolare, per quel che riguarda l'eccentricità, sono stati selezionati tre valori: $e = 0$ per un'orbita circolare, $e_\oplus = 0.01671022$ ed $e_{\odot} = 0.09341233$ per un'orbita ellittica avente rispettivamente l'eccentricità dell'orbita della Terra e di Marte attorno al sole^[28]. In questo modo i risultati ottenuti sono rappresentativi della fase successiva alla fuga dalla Terra (o da Marte) attraverso un'orbita parabolica di una missione di trasferimento verso la condizione di eliostazionarietà.

5.4.1 Orbita di parcheggio circolare

I risultati relativi alla partenza da un'orbita di parcheggio circolare ($e = 0$) sono indipendenti dal valore di θ_0 e sono stati riportati nella Tabella 5.2 mentre le corrispondenti traiettorie sono state visualizzate nella Figura 5.6. Se si considera un semiasse maggiore

	Convenzionale			SPT
	ideale	ottico	parametrico	
r_f [DU]	1.4506	1.5182	1.5265	1.3176
$\theta_f - \theta_0$ [deg]	69.7698	76.0401	76.9280	55.5539
t_f TU	3.4228	3.8800	3.9421	2.5025

Tabella 5.2: Caratteristiche dell'orbita di trasferimento di minimo tempo (r_f non vincolato) con partenza da una generica orbita di parcheggio circolare ($e = 0$) di semiasse maggiore a .

pari a quello dell'orbita della Terra attorno al Sole $a = 1$ AU e si calcolano le caratteristiche dell'orbita di trasferimento dalla Tabella 5.2 si ottengono i tempi di trasferimento riportati nella Tabella 5.3. Questi risultati sono molto interessanti in quanto forniscono

	Convenzionale			SPT
	ideale	ottico	parametrico	
t_f [giorni]	198.97	225.55	229.16	145.48

Tabella 5.3: Tempi minimi di trasferimento (r_f non vincolato) verso la condizione di eliostazionarietà con partenza dall'orbita della Terra attorno al Sole ($a = 1$ AU) supposta circolare ($e = 0$).

una stima approssimata ma ragionevole (l'orbita eliocentrica della Terra è considerata infatti perfettamente circolare) dell'intervallo di tempo necessario ad effettuare una missione di questo tipo, pensando di immettere il veicolo spaziale in una traiettoria parabolica partendo dall'orbita di lancio attorno alla Terra.

5.4.2 Orbita di parcheggio ellittica

Nel caso in cui si consideri un'orbita di parcheggio con eccentricità e diversa da zero si otterrebbe, come atteso, una dipendenza della posizione finale raggiunta (r_f, θ_f) e del tempo di trasferimento t_f dall'anomalia iniziale selezionata θ_0 .

I risultati delle simulazioni effettuate per quel che riguarda un'orbita di parcheggio terrestre ($e = e_{\oplus}$) sono riassunti nella Figura 5.7 mentre nella Figura 5.8 i grafici si riferiscono ad un'orbita di parcheggio marziana ($e = e_{\odot}$). Si osserva dal confronto tra le due figure come l'ellitticità dell'orbita di parcheggio abbia una influenza sostanziale sul tempo di missione. Tuttavia nel caso di $e = e_{\oplus}$ i valori determinati per orbita circolare

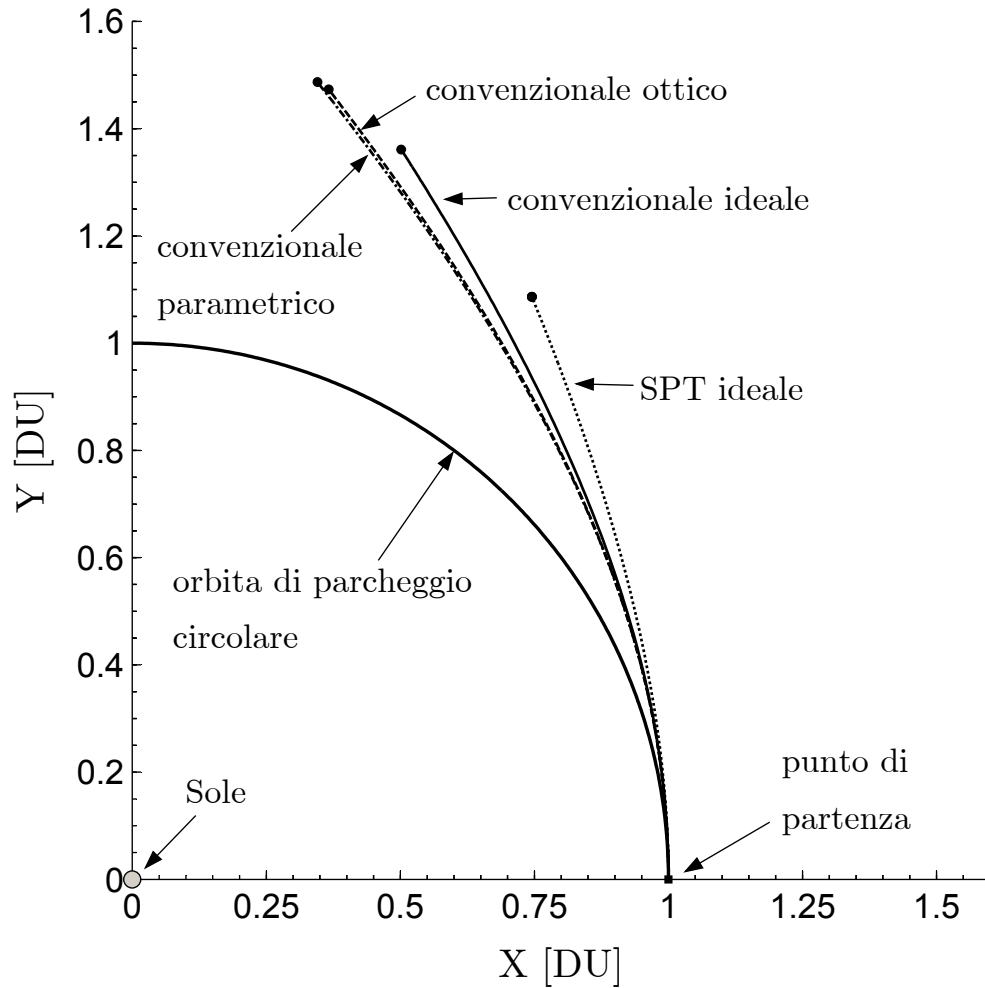


Figura 5.6: Traiettorie di minimo tempo (r_f non vincolato) per la condizione di eliostationarietà (cerchio nero) per una vela convenzionale (modello ideale, ottico e parametrico) e per una vela SPT modello ideale.

(si veda la Tabella 5.2) sono comunque una buona approssimazione dei valori realmente ottenibili considerando la reale ellitticità dell’orbita eliocentrica della Terra.

Nel caso di partenza da orbita marziana ($e = e_{\odot}$) esiste una non trascurabile dipendenza del tempo di missione dal valore iniziale dell’anomalia del satellite θ_0 e quindi della posizione iniziale di partenza sull’orbita di parcheggio. Infatti sostituendo al semiasse maggiore il valore relativo all’orbita eliocentrica marziana $a = 1.524$ AU si ottiene un intervallo di variazione del tempo di missione $t_f \in [391.54, 470.28]$ giorni nel caso di vela convenzionale con modello di forza parametrico con una “forbice” di ben 80 giorni.

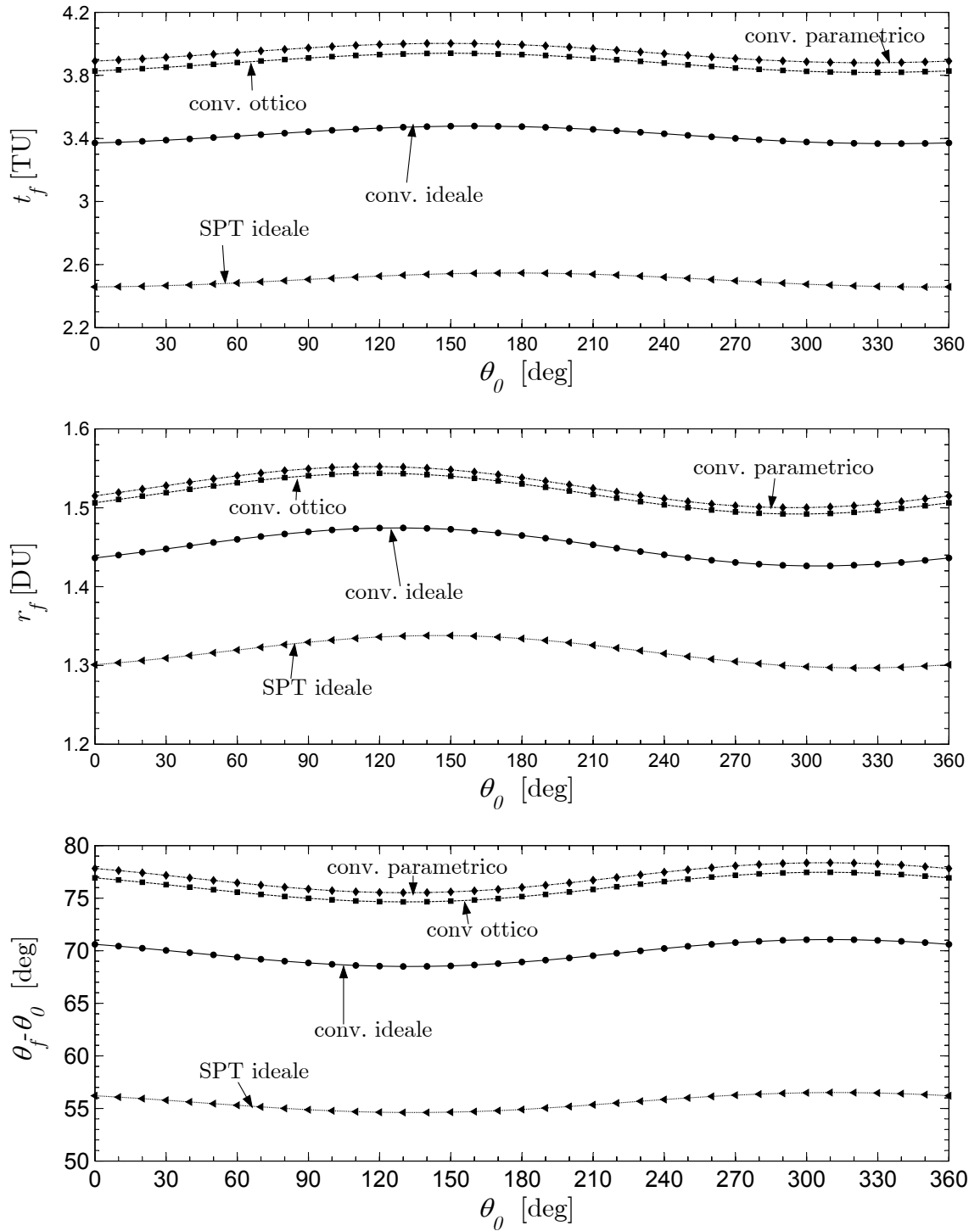


Figura 5.7: Caratteristiche dell'orbita di trasferimento di minimo tempo (r_f non vincolato) con partenza da orbita di parcheggio terrestre ($e = e_{\oplus} = 0.01671022$).

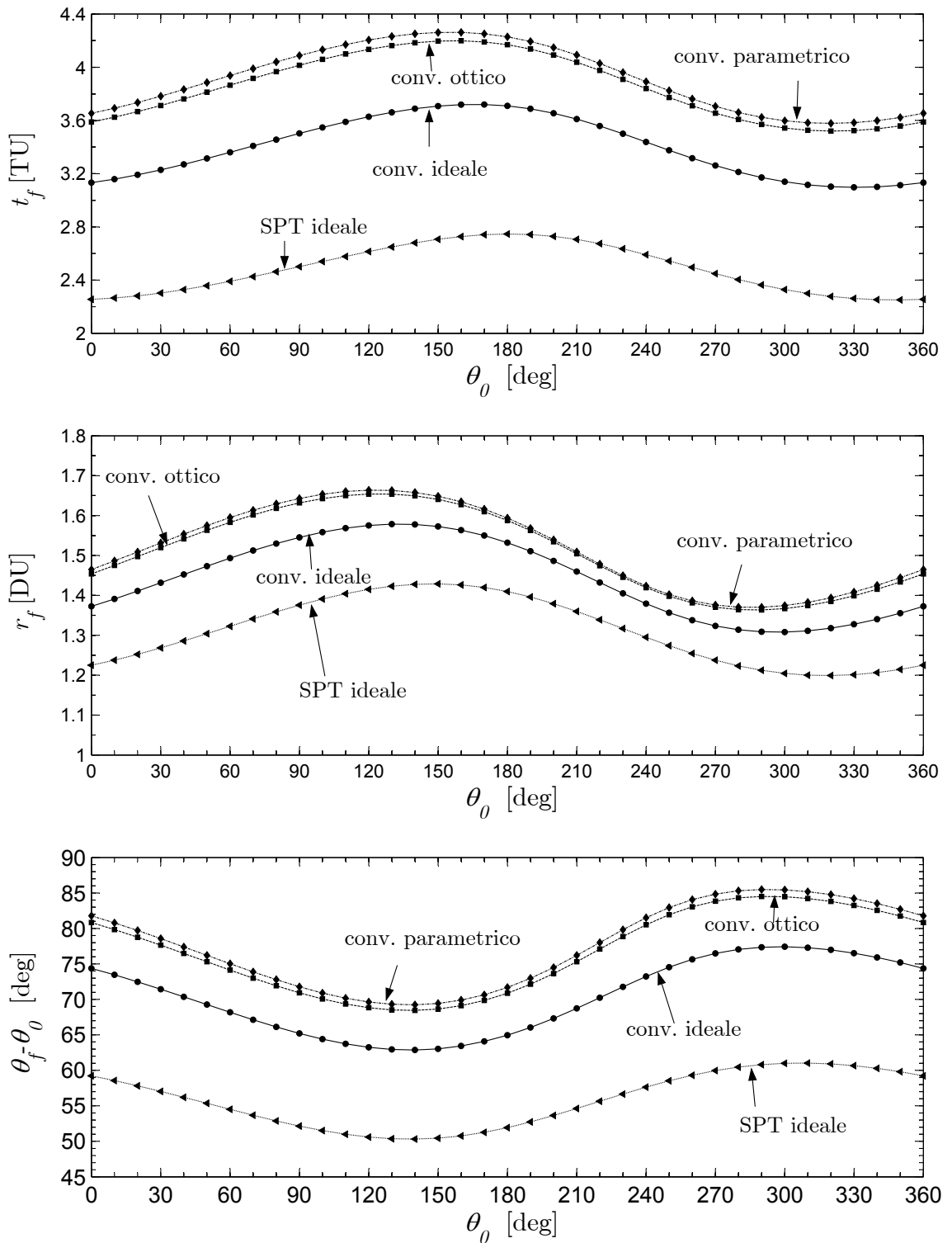


Figura 5.8: Caratteristiche dell'orbita di trasferimento di minimo tempo (r_f non vincolato) con partenza da orbita di parcheggio marziana ($e = e_{\mathcal{O}} = 0.09341233$).

5.4.3 Distanza eliocentrica finale vincolata

Nel caso in cui si scegliesse di vincolare la distanza finale raggiunta dal veicolo spaziale ad un valore fissato \bar{r}_f , utilizzando in luogo delle condizioni (5.19) le seguenti

$$u_f = 0; \quad v_f = 0; \quad r_f = \bar{r}_f; \quad \lambda_\theta(t_f) = 0 \quad (5.27)$$

si otterrebbero per un'orbita di parcheggio circolare i risultati riassunti nella Figura 5.9. Si osservi come i valori minimi assoluti del tempo di missione t_f in funzione della distanza

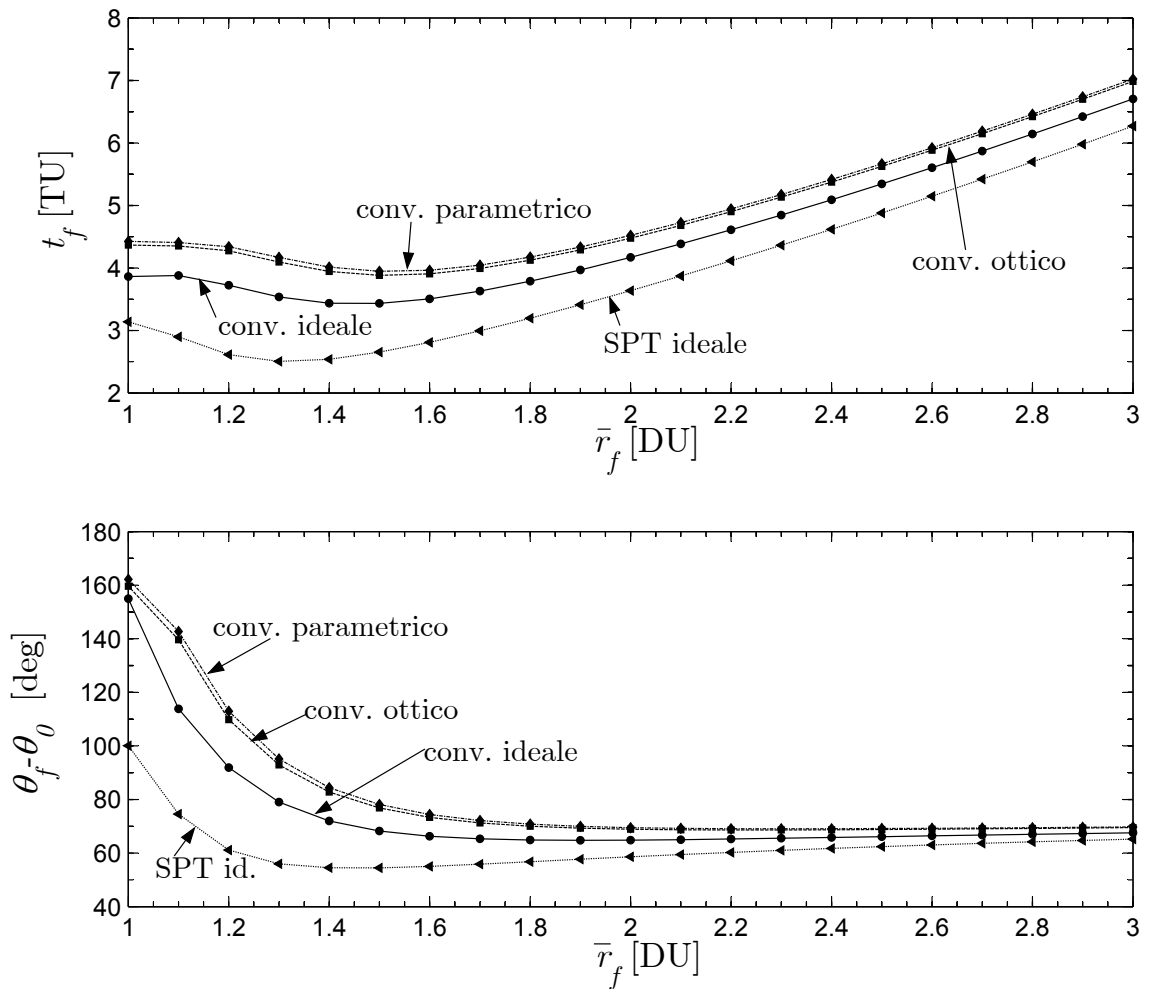


Figura 5.9: Caratteristiche dell'orbita di trasferimento di minimo tempo (r_f vincolato) con partenza da orbita circolare ($e = 0$).

eliocentrica raggiunta siano congruenti con i valori riportati nella Tabella 5.2 e relativi al caso di r_f non vincolato. Si noti inoltre come il tempo di trasferimento minimo per $\bar{r}_f \equiv r_0 = 1$ DU utilizzando una vela convenzionale con modello ideale (220 giorni) sia il 36% appena di quello ottenuto da McInnes^[57] imponendo un'orbita di trasferimento circolare e quindi risolvendo un problema inverso. La traiettoria di minimo tempo seguita

dal veicolo spaziale se si vincola la distanza finale $r_f = \bar{r}_f \equiv r_0$ a quella iniziale è stata riportata in Figura 5.10.

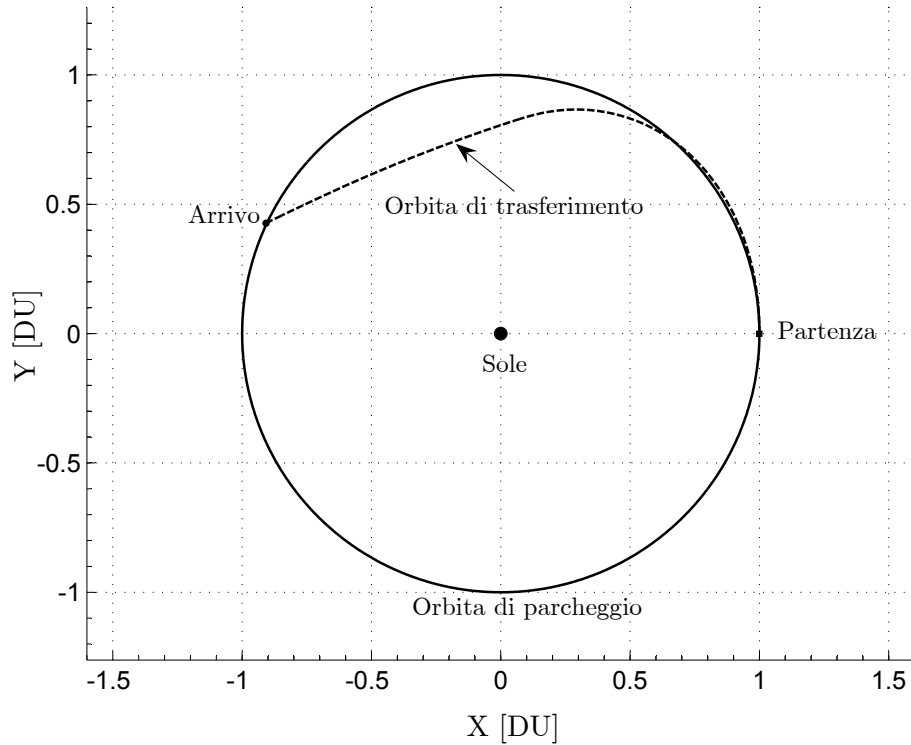


Figura 5.10: Orbita di trasferimento di minimo tempo ($r_f = \bar{r}_f \equiv r_0$) con partenza da orbita circolare ($e = 0$).

5.5 Conclusioni

In questo Capitolo sono state studiate le traiettorie ottimali, dal punto di vista del tempo di missione, di trasferimento verso una condizione di eliostazionarietà utilizzando un velivolo propulso a vela solare. Nella trattazione è stata considerata una vela solare convenzionale con modello di forza ideale, ottico e parametrico ed una vela composta con modello di forza ideale.

Sono state studiate le traiettorie ottime con e senza vincoli sulla distanza eliocentrica finale raggiunta ed è stato osservato che, partendo da una distanza pari ad 1 AU, il tempo minimo per raggiungere la condizione di eliostazionarietà risulta pari a 199 giorni per una vela convenzionale ideale se viene lasciata libera la distanza finale mentre è pari a 220 giorni se quest'ultima viene vincolata ad 1 AU. Nel primo caso la distanza finale raggiunta risulta pari a 1.4506 AU. Il tempo di trasferimento si riduce a 145 giorni se viene però utilizzata una vela composta ideale. Lo studio è stato effettuato considerando un'orbita

di partenza eliocentrica sia circolare sia ellittica rappresentativa dell'orbita della Terra (o di Marte) attorno al Sole.

Parte II

Propulsori Elettrici

6

Traiettorie interplanetarie di minimo consumo

6.1 Introduzione

Grazie al recente successo della missione spaziale *Deep Space 1* (DS1), in cui è stato per la prima volta^[60] utilizzato un propulsore a ioni alimentato attraverso dei pannelli solari (SEP, *Solar Electric Propulsion*), la propulsione elettrica è diventata di fatto una valida alternativa a quella chimica per le future missioni verso lo spazio profondo. I continui progressi tecnologici nella progettazione di sistemi SEP hanno ridotto notevolmente i costi ed i rischi collegati all'utilizzo di propulsori elettrici nella realizzazione dei sistemi propulsivi primari di un veicolo spaziale. A tal proposito, negli ultimi anni sono stati condotti numerosi studi^[61;62;63;64;65;66] riguardanti la possibilità di utilizzo, e le relative prestazioni, dei sistemi SEP nell'esplorazione spaziale.

Da questi studi è emerso che l'impiego di sistemi SEP risulta indicato per tutte quelle missioni particolarmente costose dal punto di vista energetico^[63;64]. D'altronde i sistemi SEP possono rendere attraenti alcune missioni scientifiche verso lo spazio profondo grazie all'utilizzo di veicoli di lancio più piccoli (e meno costosi) riducendo al contempo i tempi di missione^[62]. Infatti, come è stato osservato da Kluever^[65], le missioni verso piccoli corpi, come ad esempio le comete o asteroidi, possono essere portate a termine con l'utilizzo dei sistemi SEP senza ricorrere a complessi passaggi ravvicinati su corpi primari del Sistema Solare, come solitamente richiesto da traiettorie balistiche in cui vengono utilizzati propulsori ad alta spinta.

La bassa spinta generata dai sistemi SEP rende le missioni in cui tali sistemi vengono impiegati particolarmente attraenti dal punto di vista controllistico in quanto il propulsore rimane attivo durante una larga parte del tempo totale di missione, la quale può addirittura durare alcuni anni. Questi lunghi tempi di spinta, caratteristica comune a tutti i propulsori elettrici, rendono piuttosto complicata la pianificazione della traiettoria

ottima e spiegano in questo modo il gran numero di articoli sull'argomento che è possibile reperire in letteratura. Nonostante questo, la maggior parte di questi articoli pone l'accento in maniera preponderante sulla tecnica utilizzata nel calcolo della traiettoria ottima, piuttosto che concentrarsi sullo sviluppo di modelli dell'apparato propulsivo attinenti alla realtà^[67;68;69;70]. È ben noto che i benefici introdotti dai sistemi SEP rispetto ai più convenzionali propulsori chimici, in termini di consumo di propellente, sono dovuti all'alto impulso specifico da questi messo a disposizione. Chiaramente la formulazione di un problema di controllo ottimo per un sistema SEP non può prescindere dalla considerazione di tutti quei vincoli legati al funzionamento reale di questo tipo di propulsori.

Da un punto di vista analitico alcuni risultati molto interessanti sono stati ottenuti da Kechichian^[71], il quale ha studiato il problema della determinazione della traiettoria ottima, dal punto di vista del consumo di propellente, nel caso di impulso specifico I_{sp} vincolato all'interno di un intervallo di variazione ammissibile. Altri importanti contributi all'argomento sono stati offerti da Carter e Pardis^[72], Vadali et al.^[73], Nah et al.^[74]. Tutti questi lavori hanno come comune denominatore il fatto che l'efficienza del sistema propulsivo è supposta costante. Tuttavia questa rappresenta una forte approssimazione, come sottolineato da Auweter-Kurtz e Kurtz^[75], in quanto l'efficienza del sistema propulsivo dipende in maniera sostanziale dalla velocità efficace di scarico e quindi, in ultima analisi, dall'impulso specifico. D'altronde, l'ipotesi di efficienza costante semplifica notevolmente, dal punto di vista analitico, il problema di ottimo.

Solo in alcuni casi le prestazioni reali di un sistema SEP sono state incluse nel modello utilizzato per il calcolo della legge di controllo ottima. Ad esempio Williams e Coverstone-Carroll^[63;64] e prima di loro Sauer^[66] hanno utilizzato un'approssimazione polinomiale per descrivere la variazione della spinta e del flusso di massa del propellente in funzione della potenza in ingresso al processore di potenza (PPU, *Power Processing Unit*). Tuttavia questo approccio complica notevolmente la legge di controllo che, infatti, non è esplicitamente indicata.

Per questi motivi in questo Capitolo il problema del calcolo della traiettoria di minimo consumo in un classico trasferimento orbitale interplanetario verrà riconsiderato tenendo in conto un modello meno approssimato del sistema propulsivo. Utilizzando infatti i dati sperimentali del propulsore NSTAR (*NASA SEP Technology Application Readiness*) e del propulsore NEXT (*NASA's Evolutionary Xenon Thruster*) verranno calcolati dei polinomi di migliore approssimazione che verranno utilizzati nel calcolo del modello di prestazioni del sistema SEP. Questo approccio permette, per la prima volta, di derivare la legge di controllo in forma chiusa nel caso di efficienza variabile e di investigare le prestazioni della missione in funzione del grado del polinomio approssimante. La trattazione adottata permette anche di tenere in conto eventuali spegnimenti del propulsore per permettere l'esistenza di tratti di volo per inerzia nella traiettoria ottima. Utilizzando un metodo indiretto verrà affrontato il problema di determinare la traiettoria di minimo consumo nel

caso di un *rendez-vous* interplanetario Terra-Marte. Per entrambi i propulsori studiati verrà dimostrato che l'ipotesi di efficienza costante comporta degli errori significativi nel calcolo della massa minima di propellente necessaria a concludere la missione.

6.2 Equazioni del moto

Le equazioni del moto di un veicolo spaziale di massa m con un propulsore SEP in un sistema di riferimento eliocentrico inerziale sono le seguenti:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (6.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu_{\odot}}{r^3} \mathbf{r} + \frac{2\eta\tau P_T}{m g_0 I_{sp}} \hat{\mathbf{a}}_{SEP} \quad (6.2)$$

$$\dot{m} = -\frac{2\eta\tau P_T}{g_0^2 I_{sp}^2} \quad (6.3)$$

dove \mathbf{r} e \mathbf{v} sono come a solito i vettori posizione e velocità del veicolo spaziale (con $r \triangleq \|\mathbf{r}\|$), μ_{\odot} è il parametro gravitazionale del Sole, g_0 è l'accelerazione di gravità terrestre standard mentre $\hat{\mathbf{a}}_{SEP}$ è il versore della spinta generata dal propulsore. Si suppone che il veicolo spaziale sia spinto da un sistema SEP avente impulso specifico I_{sp} variabile, efficienza η variabile e potenza massima in ingresso ai propulsori P_T . Inoltre si ipotizza che la potenza in ingresso possa essere modulata attraverso la variabile di controllo $\tau \in [0,1]$.

Si osservi che le equazioni (6.1)–(6.3) possono essere riscritte in forma compatta come

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (6.4)$$

dove $\mathbf{x} \triangleq [\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T, m]^T$ è il vettore di stato mentre $\mathbf{u} \triangleq [\tau, I_{sp}, \hat{\mathbf{a}}_{SEP}^T]^T$ è il vettore di controllo. Il vincolo legato al valore massimo e minimo ammissibile per quel che riguarda l'impulso specifico è introdotto attraverso una relazione di disuguaglianza del tipo

$$I_{sp_{\min}} \leq I_{sp} \leq I_{sp_{\max}} \quad (6.5)$$

6.2.1 Schematizzazione del veicolo spaziale

Il veicolo spaziale è stato modellato attraverso tre grandi sistemi^[76]:

1. i pannelli solari;
2. il processore di potenza (PPU);
3. i propulsori.

La potenza disponibile per la PPU risulta pari alla differenza tra la potenza in uscita dai pannelli solari P_{SA} e la potenza P_L allocata per il funzionamento dei rimanenti sottosistemi

del veicolo spaziale. Quest'ultima è supposta costante^[64] durante l'intera missione di trasferimento. Non tutta la potenza disponibile alla PPU viene inviata ai propulsori. Per tener conto di questo aspetto è stata introdotta l'efficienza $\eta_P < 1$ della PPU (chiamata comunemente in inglese *duty cycle*). In base a queste considerazioni si può calcolare la potenza massima in ingresso ai propulsori nella maniera seguente:

$$P_T = \begin{cases} \eta_P P_P^{\max}, & \text{se } P_{SA} - P_L \geq P_P^{\max} \\ \eta_P (P_{SA} - P_L), & \text{se } P_{SA} - P_L < P_P^{\max} \end{cases} \quad (6.6)$$

dove P_P^{\max} indica la potenza massima in ingresso alla PPU. La potenza fornita dai pannelli solari dipende in sostanza dalla distanza r sal Sole a cui si trova il veicolo spaziale attraverso la relazione^[76]:

$$P_{SA} = \frac{P_{\odot}}{r^2} \left(\frac{d_1 + d_2 r^{-1} + d_3 r^{-2}}{1 + d_4 r + d_5 r^2} \right) \quad (6.7)$$

dove P_{\odot} è la potenza disponibile ad una distanza dal Sole pari ad 1 AU mentre il termine tra parentesi rappresenta l'efficienza relativa dei pannelli solari, funzione dei coefficienti empirici d_1, \dots, d_5 .

Si ipotizza infine che l'efficienza dei propulsori η vari con l'impulso specifico in accordo con la seguente approssimazione polinomiale di grado n :

$$\eta = \sum_{k=0}^n c_k (I_{sp})^k \quad (6.8)$$

dove i coefficienti c_k sono calcolati in maniera tale da approssimare al meglio i dati sperimentali del propulsore.

6.3 Formulazione del problema variazionale

Il problema che viene ora considerato è quello di determinare la legge di controllo ottima $\mathbf{u}(t)$ (dove $t \in [t_0, t_f]$), in maniera tale da minimizzare la massa di propellente necessaria a trasferire il veicolo spaziale da uno stato iniziale $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ ad uno stato finale $(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f)$ entrambi noti ed assegnati. Equivalentemente questo corrisponde a massimizzare l'indice di prestazione:

$$J = m_f \quad (6.9)$$

dove m_f indica la massa finale (istante t_f) del veicolo spaziale. Tenendo presenti le equazioni (6.1)–(6.3), la funzione Hamiltoniana associata al problema in esame diventa:

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r \cdot \mathbf{v} - \frac{\mu_{\odot}}{r^3} (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{r}) + \frac{2\eta\tau P_T}{m g_0 I_{sp}} (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \hat{\mathbf{a}}_{SEP}) - \frac{2\eta\tau P_T \lambda_m}{g_0^2 I_{sp}^2} \quad (6.10)$$

dove $\boldsymbol{\lambda}_r$ e $\boldsymbol{\lambda}_v$ sono i vettori delle variabili aggiunte alla posizione e velocità rispettivamente, mentre λ_m è la variabile aggiunta alla massa m .

6.3.1 Equazioni di Eulero-Lagrange

Le equazioni di Eulero-Lagrange per il problema in esame si determinano partendo dalla (6.10):

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mu_\odot}{r^3} \boldsymbol{\lambda}_v - \frac{3\mu_\odot (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{2\eta\tau}{m g_0 I_{sp}} (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \hat{\mathbf{a}}) \frac{\partial P_T}{\partial \mathbf{r}} + \frac{2\eta\tau \lambda_m}{g_0^2 I_{sp}^2} \frac{\partial P_T}{\partial \mathbf{r}} \quad (6.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = -\boldsymbol{\lambda}_r \quad (6.12)$$

$$\dot{\lambda}_m = -\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{2\eta\tau P}{m^2 g_0 I_{sp}} (\boldsymbol{\lambda}_v \cdot \hat{\mathbf{a}}) \quad (6.13)$$

Senza perdere in generalità si assume che il valore iniziale della variabile aggiunta alla massa sia positivo, cioè $\lambda_m(t_0) > 0$. Si osservi che il gradiente della funzione potenza P_T calcolato rispetto al vettore posizione \mathbf{r} , richiesto nella scrittura dell'equazione (6.11), si calcola combinando opportunamente l'equazione (6.6) e (6.7). Il risultato è il seguente:

$$\frac{\partial P_T}{\partial \mathbf{r}} = \begin{cases} 0, & \text{se } P_{SA} - P_L \geq P_P^{\max} \\ -\mathbf{r} P_\odot \eta_P N(r)/D(r), & \text{se } P_{SA} - P_L < P_P^{\max} \end{cases} \quad (6.14)$$

dove si è posto per brevità di scrittura

$$\begin{aligned} N(r) &\triangleq 4 d_1 d_5 r^2 + (5 d_2 d_5 + 3 d_1 d_4) r + 6 d_3 d_5 + 4 d_2 d_4 + \\ &\quad 2 d_1 + (5 d_3 d_4 + 3 d_2)/r + 4 d_3/r^2 \\ D(r) &\triangleq r^4 (1 + d_4 r + d_5 r^2)^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

6.4 Legge di controllo ottima

Invocando il principio del massimo di Pontryagin è possibile determinare la legge di controllo ottima individuando quel particolare valore di $\mathbf{u}(t)$, nell'insieme dei controlli ammissibili \mathcal{U} , che massimizzano istante per istante la funzione Hamiltoniana. Questo corrisponde a massimizzare quella parte di H che dipende esplicitamente dai controlli, e che sarà indicata con il termine H' :

$$\mathbf{u} = \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} H \equiv \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} H' \quad (6.16)$$

con

$$H' \triangleq \frac{2\eta\lambda_v\tau P}{m g_0 I_{sp}} \hat{\mathbf{a}}_{SEP} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_v - \frac{\mathbf{f}}{I_{sp}} \hat{\mathbf{a}}_{SEP} \right) \quad (6.17)$$

dove $\hat{\lambda}_v \triangleq \lambda_v / \lambda_v$ indica la direzione del *primer vector*^[26], $\lambda_v = \|\lambda_v\|$, mentre

$$f \triangleq \frac{m \lambda_m}{g_0 \lambda_v} \quad (6.18)$$

è una funzione del tempo (ed avente le dimensioni anche di un tempo) che identifica univocamente al generico istante t il valore ottimo dell'impulso specifico, come verrà ampiamente discusso in seguito.

6.4.1 Valore ottimo di \hat{a}_{SEP}

Al fine di massimizzare H' , si consideri la direzione della spinta \hat{a}_{SEP} . Fino a quando $\lambda_v \neq 0$, l'equazione (6.17) implica che \hat{a}_{SEP} risulta parallelo al *primer vector* λ_v ^[72;71], ovvero che:

$$\hat{a}_{SEP} = \hat{\lambda}_v \quad (6.19)$$

Si pone invece $\tau = 0$ nel caso in cui fosse verificata la condizione $\lambda_v = 0$. Con l'aiuto dell'equazione (6.19), l'equazione (6.13) mostra che la variabile aggiunta alla massa risulta sempre semidefinita positiva, cioè $\dot{\lambda}_m \geq 0 \forall t \geq t_0$. Quindi l'equazione (6.18) implica che il parametro f risulta sempre positivo ($f > 0$) visto che per ipotesi $\lambda_m(t_0) > 0$.

Inoltre si osservi che l'equazione (6.17) può essere riscritta come

$$H' = \frac{2 \eta \lambda_v \tau P_T}{m g_0 I_{sp}} \left(1 - \frac{f}{I_{sp}} \right) \quad (6.20)$$

la quale indica che H' risulta adesso una funzione dei due controlli indipendenti τ e I_{sp} .

6.4.2 Valore ottimo di τ

La legge di controllo ottima per quel che riguarda il livello di potenza τ si determina osservando che la funzione Hamiltoniana ridotta H' dipende linearmente da τ . Com'è ben noto un controllo di tipo *bang-bang* risulta ottimo^[25] per questa variabile. Visto che $H' > 0$ se e solo se $I_{sp} > f$, si ottiene facilmente:

$$\tau = \begin{cases} 1, & \text{se } f < I_{sp_{\max}} \\ 0, & \text{se } f \geq I_{sp_{\max}} \end{cases} \quad (6.21)$$

L'equazione precedente implica che, fino a quando $f \geq I_{sp_{\max}}$ il valore ottimo dell'impulso specifico non deve essere calcolato in quanto, in qual caso, è presente un tratto di volo per inerzia (propulsore spento). Per questo motivo, al fine di calcolare il valore ottimo di I_{sp} si supporrà nel seguito che $f < I_{sp_{\max}}$.

6.4.3 Valore ottimo di I_{sp}

Ricordando che l'efficienza del propulsore è data, secondo l'approssimazione adottata, dall'equazione (6.8), imponendo la condizione necessaria $\partial H'/\partial I_{sp} = 0$ dall'equazione (6.20) si ottiene:

$$f = \frac{\sum_{k=0}^n (1-k) c_k (I_{sp})^{(k+1)}}{\sum_{k=0}^n (2-k) c_k (I_{sp})^k} \quad (6.22)$$

che risulta valida per ogni intero n a patto che $\lambda_v \neq 0$. In pratica un'approssimazione sufficientemente accurata di η si ottiene ponendo $n = 2$.

L'equazione (6.22) afferma che il valore dell'impulso specifico ottimo è strettamente connesso al valore istantaneo di f il quale dipende dal modulo del *primer vector*, dalla massa del veicolo spaziale e da λ_m , come si osserva dall'equazione (6.18).

Le leggi di controllo ottime per $n = 0, 1$ e 2 saranno ora studiate approfonditamente utilizzando i coefficienti relativi ai propulsori NSTAR^[77] e NEXT^[78] e riportati nella Tabella 6.1.

n	c_0	$c_1 \times 10^{-4}$ s^{-1}	$c_2 \times 10^{-7}$ s^{-2}
<i>NSTAR</i>			
0	0.62		
1	0.0787	1.7022	
2	0.7622	-3.9677	1.1070
<i>NEXT</i>			
0	0.68		
1	0.2916	0.9624	
2	0.1424	1.9231	-0.1499

Tabella 6.1: Coefficienti polinomiali per l'efficienza del propulsore η relativi ai sistemi NSTAR e NEXT.

Approssimazione quadratica di η

Quando $n = 2$ viene sostituito nell'equazione (6.8) si ottiene un'approssimazione ragionevole dell'efficienza η in funzione dell'impulso specifico del propulsore I_{sp} , come si osserva nelle Figure 6.1 e 6.2 per quel che riguarda rispettivamente il sistema NSTAR e NEXT.

La legge di controllo ottima per quel che riguarda l'impulso specifico verrà discussa utilizzando un approccio geometrico al fine di semplificare la trattazione. Sia \mathcal{S} la regione del piano (f, I_{sp}) che soddisfa le seguenti condizioni:

1. la funzione Hamiltoniana ridotta risulta semidefinita positiva, $H' \geq 0$
2. la condizione di convessità è soddisfatta, $\partial^2 H'/\partial I_{sp}^2 < 0$

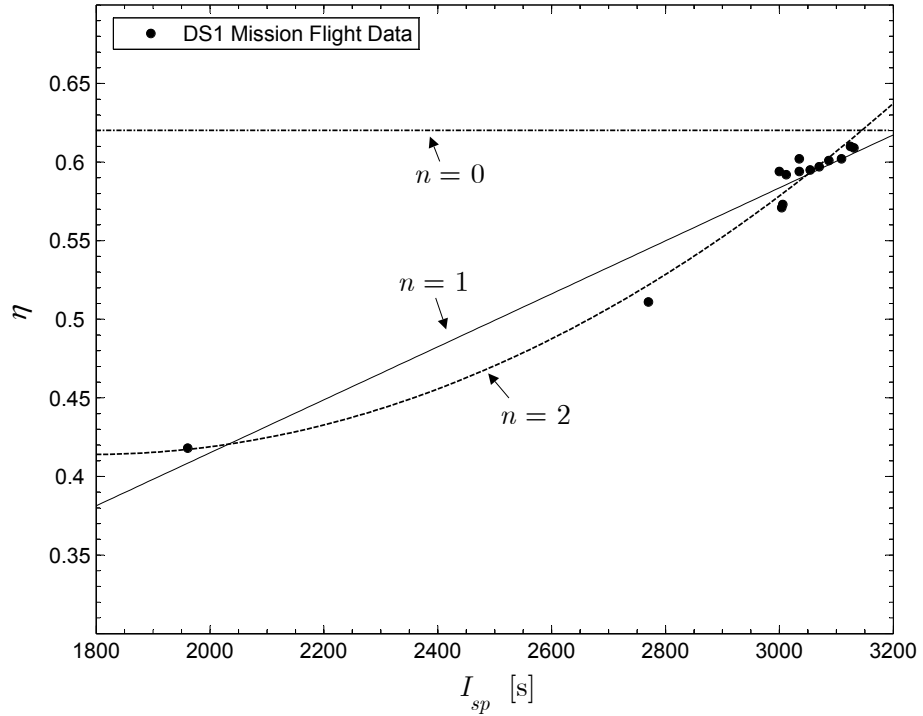


Figura 6.1: Approssimazione polinomiale dell'efficienza del propulsore η in funzione dell'impulso specifico I_{sp} per il sistema NSTAR.

3. i vincoli sulla variazione ammissibile dell'impulso specifico sono rispettati, $I_{sp_{\min}} \leq I_{sp} \leq I_{sp_{\max}}$
4. il propulsore è in funzione, $\tau = 1$

Si consideri l'insieme \mathcal{P} delle coppie (\bar{f}, \bar{I}_{sp}) che soddisfano la condizione necessaria $\partial H' / \partial I_{sp} = 0$. Si osservi a tal proposito che l'insieme \mathcal{P} risulta costituito dalle soluzioni dell'equazione (6.22). Chiaramente il valore dell'impulso specifico \bar{I}_{sp} massimizza la funzione H' a patto che $(\bar{f}, \bar{I}_{sp}) \in \mathcal{S}$. Sotto l'ipotesi di $c_2 \neq 0$, sostituendo $n = 2$ nell'equazione (6.22) si ottiene che l'insieme \mathcal{P} coincide con le soluzioni dell'equazione polinomiale di terzo grado nell'incognita I_{sp} seguente:

$$I_{sp}^3 + \left(\frac{c_1}{c_2} \bar{f} - \frac{c_0}{c_2} \right) I_{sp} + 2 \frac{c_0}{c_2} \bar{f} = 0 \quad (6.23)$$

Tuttavia l'intersezione di \mathcal{P} con \mathcal{S} potrebbe anche essere vuota a causa dei dati sperimentali dei propulsori studiati. Per quel che riguarda i propulsori NSTAR e NEXT si ottengono le situazioni illustrate rispettivamente nelle Figure 6.3 e 6.4. Si consideri tanto per cominciare il propulsore NSTAR. Visto che $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, il valore dell'impulso specifico che massimizza H' si ottiene studiando i valori estremi di I_{sp} nell'intervallo (6.5). Si può facilmente verificare che $H'(I_{sp_{\min}}) > H'(I_{sp_{\max}})$ nel caso in cui $\bar{f} < \bar{f}^*$ mentre $H'(I_{sp_{\min}}) <$

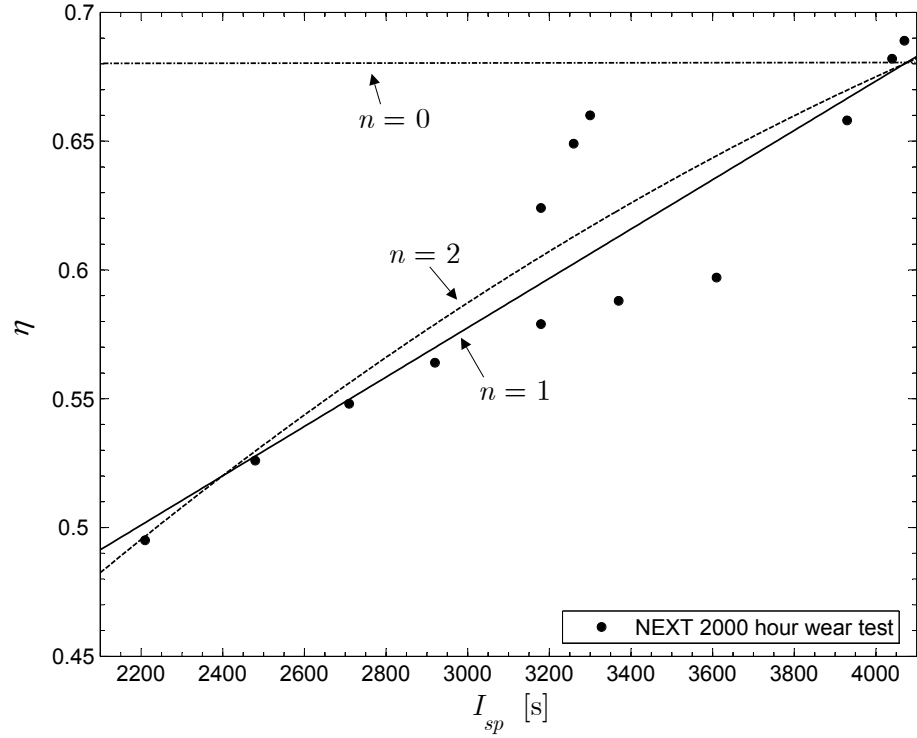


Figura 6.2: Approssimazione polinomiale dell'efficienza del propulsore η in funzione dell'impulso specifico I_{sp} per il sistema NEXT.

$H'(I_{sp_{\max}})$ quando $f > f^*$, dove f^* indica il valore del parametro f ottenuto imponendo $H'(I_{sp_{\min}}) = H'(I_{sp_{\max}})$:

$$f^* = \frac{I_{sp_{\min}} I_{sp_{\max}} (c_0 - c_2 I_{sp_{\min}} I_{sp_{\max}})}{c_0 (I_{sp_{\min}} + I_{sp_{\max}}) + c_1 I_{sp_{\min}} I_{sp_{\max}}} \quad (6.24)$$

Quindi, il valore ottimo dell'impulso specifico per il propulsore NSTAR è dato da $I_{sp} = I_{sp}^*$ essendo

$$I_{sp}^* = \begin{cases} I_{sp_{\min}}, & \text{se } f < f^* \\ I_{sp_{\max}}, & \text{se } f > f^* \end{cases} \quad (6.25)$$

Il propulsore NEXT ha un comportamento differente. Infatti dalla Figura 6.4 risulta chiaro che in questo caso esiste un'intersezione non vuota dell'insieme \mathcal{P} con l'insieme \mathcal{S} . Sia f_{\min} la soluzione dell'equazione (6.23) a cui corrisponde $I_{sp} = I_{sp_{\min}}$ mentre con f_{\max} si indichi la soluzione sempre della stessa equazione con $I_{sp} = I_{sp_{\max}}$. La legge di controllo

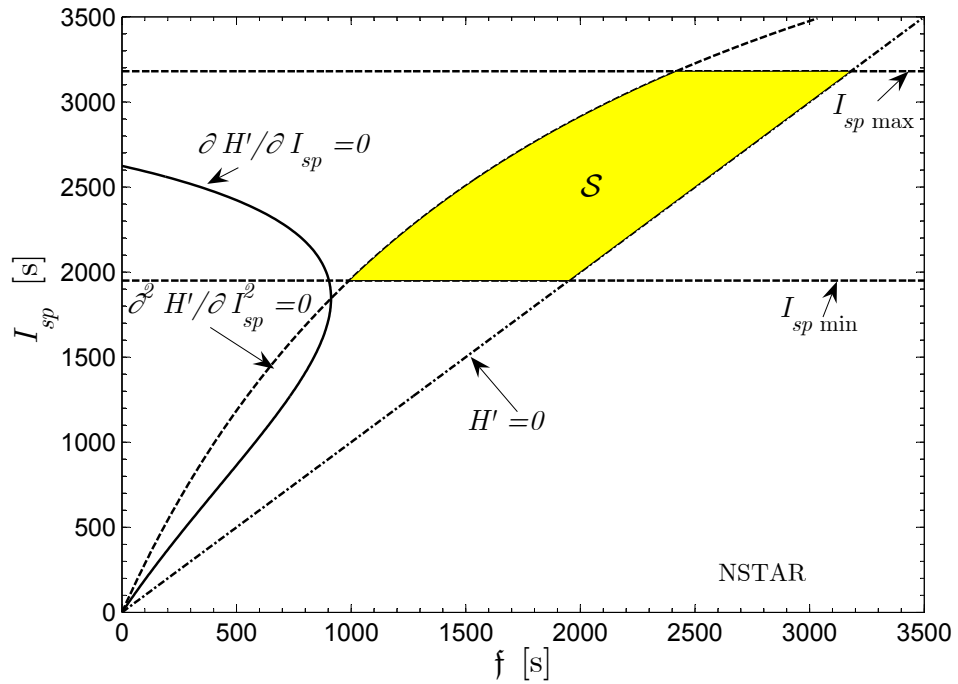


Figura 6.3: Regione ammissibile S per un'approssimazione quadratica di η in funzione I_{sp} relativa al propulsore NSTAR.

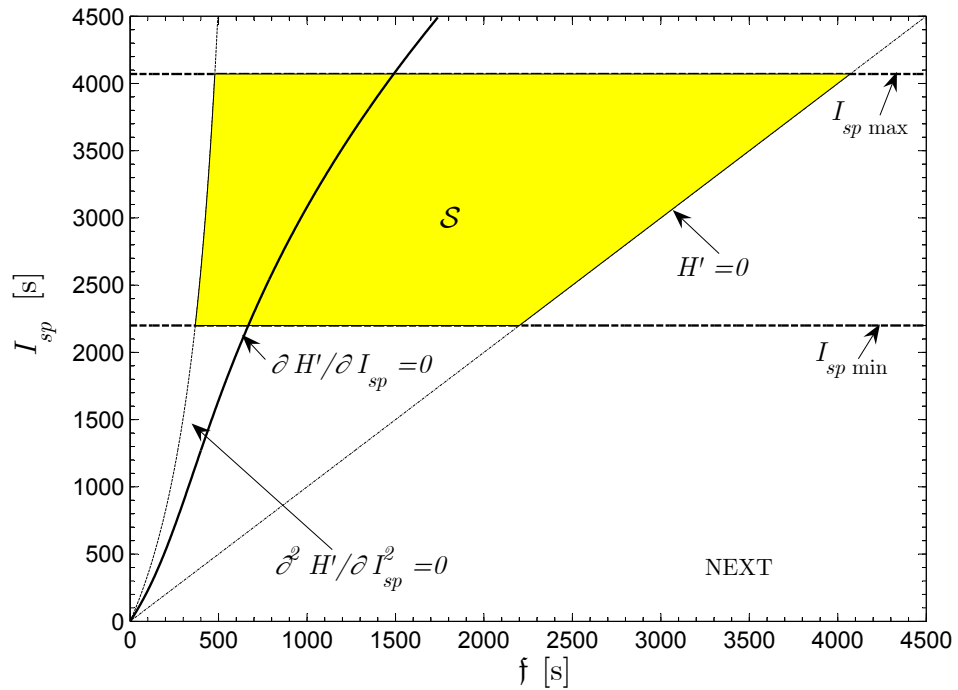


Figura 6.4: Regione ammissibile S per un'approssimazione quadratica di η in funzione I_{sp} relativa al propulsore NEXT.

ottima risulta essere così:

$$I_{sp}^* = \begin{cases} I_{sp\min}, & \text{se } f < f_{\min} \\ \bar{I}_{sp}, & \text{se } f_{\min} \leq f \leq f_{\max} \\ I_{sp\max}, & \text{se } f > f_{\max} \end{cases} \quad (6.26)$$

dove \bar{I}_{sp} è il valore dell'impulso specifico soluzione dell'equazione (6.23).

Approssimazione lineare e costante di η

Nel caso in cui si utilizzi un'approssimazione lineare o costante dell'efficienza η in funzione di I_{sp} , si può facilmente verificare che la legge di controllo ottima è nella forma dell'equazione (6.26), dove \bar{I}_{sp} è il valore dell'impulso specifico ottenuto sostituendo $n = 1$ e $n = 0$ nell'equazione (6.22). Il risultato è il seguente:

$$\bar{I}_{sp} = \begin{cases} \frac{2c_0 f}{c_0 - c_1 f}, & \text{se } n = 1 \\ 2f, & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Nell'equazione precedente, f_{\min} ed f_{\max} sono i valori del parametro f che si ottengono dall'equazione (6.22) imponendo rispettivamente $I_{sp} = I_{sp\min}$ ed $I_{sp} = I_{sp\max}$. Si osservi che la legge di controllo per $n = 0$ (vale a dire $\eta = \text{costante}$) è in perfetto accordo con i risultati di Kechichian^[71] e di Nah et al.^[74].

La legge di controllo ottima per i due propulsori nei tre casi $n = 0, 1$ e 2 è stata riassunta nella Figura 6.5 in funzione del parametro f .

6.5 Simulazioni ed analisi dei risultati

Il problema differenziale ai valori al bordo associato al problema variazionale studiato è costituito dalle equazioni del moto (6.1)–(6.3) e dalle equazioni di Eulero-Lagrange (6.11)–(6.13). Le condizioni al bordo sono vincolate dalle effemeridi planetarie basate sul modello^[37] JPL DE405/LE405 e sono costituite da 12 condizioni scalari legate alla posizione e velocità del veicolo spaziale sia all'istante iniziale $t = t_0$ che all'istante finale $t = t_f$. Le rimanenti due condizioni al bordo sono date dalla massa iniziale del veicolo $m_0 = m(t_0)$ e dalla condizione di trasversalità $\lambda_m(t_f) = 1$.

Un insieme di unità canoniche^[79] è stato utilizzato nell'integrazione del problema differenziale al fine di ridurre la sua sensibilità numerica. Le equazioni differenziali sono state integrate in doppia precisione utilizzando un metodo di Runge-Kutta del quarto ordine a passo variabile con una tolleranza assoluta e relativa di 10^{-10} . Le condizioni finali desiderate sono state raggiunte, durante le simulazioni, con una tolleranza di 1×10^5 km

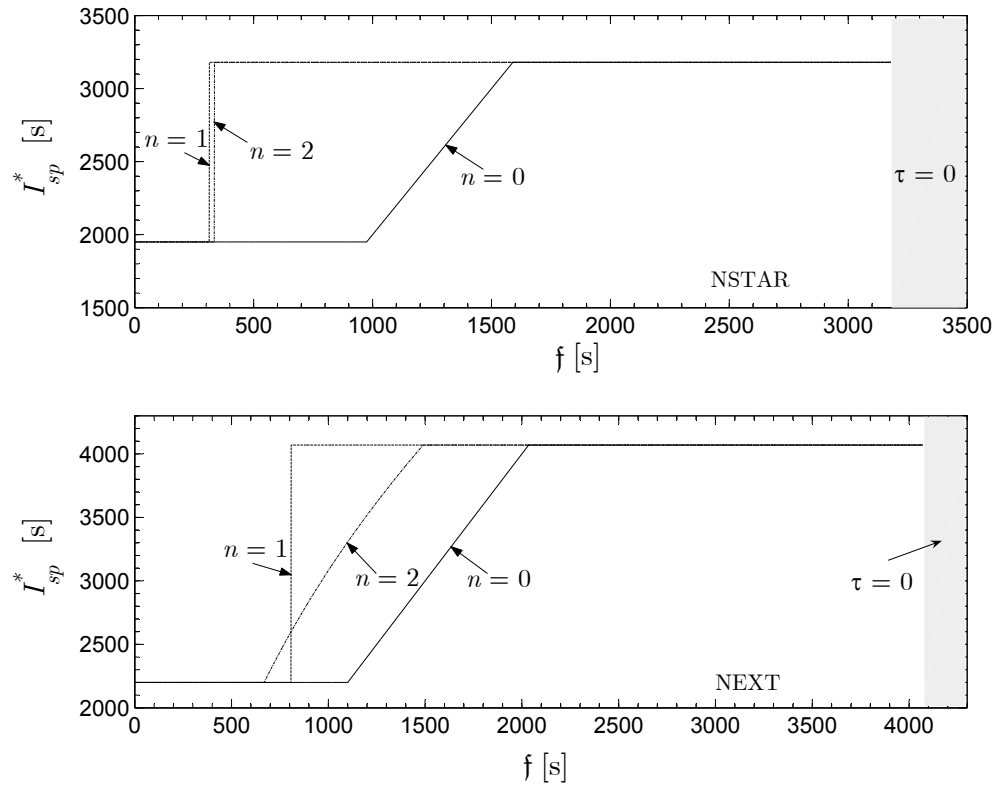


Figura 6.5: Valore ottimo dell'impulso specifico in funzione del parametro f per il propulsore NSTAR e NEXT nel caso di $n = 0, 1$ e 2 .

sulla posizione e di 0.7 km/s sulla velocità. Questi valori sono compatibili con un'analisi preliminare di missione^[80] e permettono di ottenere dei risultati in un tempo di calcolo accettabile ed estremamente contenuto.

Sono state simulate delle missioni di trasferimento interplanetario verso Marte sia con sistemi NSTAR che con sistemi NEXT. In entrambi i casi i coefficienti d_1, \dots, d_5 dell'equazione (6.7), che stabiliscono le prestazioni del sistema di generazione di potenza basato su pannelli solari, sono stati ricavati dal lavoro di Williams e Coverstone-Carroll^[63]. In particolare sono stati assunti i valori riportati nella Tabella 6.2. Sono state considerate missioni

d_1	1.1063
d_2	0.1495
d_3	-0.299
d_4	-0.0432
d_5	0

Tabella 6.2: Coefficienti empirici relativi alle prestazioni del sistema di generazione di potenza basato sull'utilizzo di pannelli fotovoltaici.

di trasferimento con massa al lancio compatibile con quella relativa ad un lanciatore del tipo Delta II e cioè 1300 kg con un eccesso iperbolico nullo. Inoltre la potenza allocata ai rimanenti sottosistemi del veicolo spaziale è stata assunta pari a $P_L = 400 \text{ W}$ ^[64].

6.5.1 Missioni verso Marte con un sistema NSTAR

Per questo tipo di propulsore l'impulso specifico è vincolato a variare tra $I_{sp_{\min}} = 1950 \text{ s}$ e $I_{sp_{\max}} = 3180 \text{ s}$ ^[77], la potenza massima in ingresso alla PPU è $P_P^{\max} = 2.53 \text{ kW}$, i pannelli solari forniscono una potenza ad 1 AU di $P_{\odot} = 5 \text{ kW}$ mentre il *duty cycle* è stato preso pari a $\eta_P = 0.9$.

Alcune missioni verso Marte con l'utilizzo di un sistema NSTAR sono state già studiate da Williams e Coverstone-Carroll^[64]. Nel loro lavoro gli Autori hanno dimostrato che, quando vengono considerati lunghi tempi di missione, è possibile ottenere una finestra di lancio relativamente larga in cui le prestazioni del sistema (dal punto di vista del consumo di propellente) sono praticamente equivalenti. Assumendo quindi un tempo di missione di 3 anni, la data di lancio ottima ricade nell'intervallo Giugno-Dicembre 2006^[64]. In accordo con questi risultati, a scopo comparativo è stata adottata una data di lancio corrispondente al 1 Agosto 2006.

La legge di controllo ottima per quel che riguarda l'impulso specifico (cfr. la Figura 6.6), presenta due fasi di volo propulso e due tratti di volo per inerzia in tutti e tre i valori di n considerati. Inoltre l'impulso specifico viene modulato esclusivamente per $n = 0$. Si osservi che una fase di volo per inerzia è presente al termine della missione. Questo indica un *early rendezvous*, compatibile con le tolleranze finali di ingaggio imposte. Per quel che riguarda il consumo di propellente Δm i risultati sono i seguenti: $\Delta m = 199 \text{ kg}$ per $n = 0$, $\Delta m = 213 \text{ kg}$ per $n = 1$ e $n = 2$. In tutte le traiettorie simulate il veicolo spaziale raggiunge Marte con un eccesso iperbolico nominale nullo. Come si può osservare, quando viene utilizzato un modello accurato del sistema propulsivo ($n = 2$), si ottiene nelle simulazioni in incremento non trascurabile del consumo di propellente dell'ordine del 7% rispetto al modello più semplificato di efficienza costante ($n = 0$).

6.5.2 Missioni verso Marte con un sistema NEXT

L'impulso specifico per i sistemi NEXT è vincolato^[78] a variare tra un valore minimo $I_{sp_{\min}} = 2200 \text{ s}$ ed un valore massimo $I_{sp_{\max}} = 4090 \text{ s}$, la potenza massima in ingresso alla PPU è $P_P^{\max} = 6.5 \text{ kW}$, i pannelli solari forniscono una potenza ad 1 AU di $P_{\odot} = 10 \text{ kW}$ mentre il *duty cycle* è stato preso pari a $\eta_P = 0.94$.

In questo caso è stata considerata una missione di trasferimento veloce verso Marte con un tempo di volo di 500 giorni ed una data di partenza nel primo Aprile 2009. Si noti che la data di partenza non è stata ottimizzata. La storia temporale della legge di controllo ottima per l'impulso specifico è mostrata nella Figura 6.7. In tutti e tre i casi studiati, sono

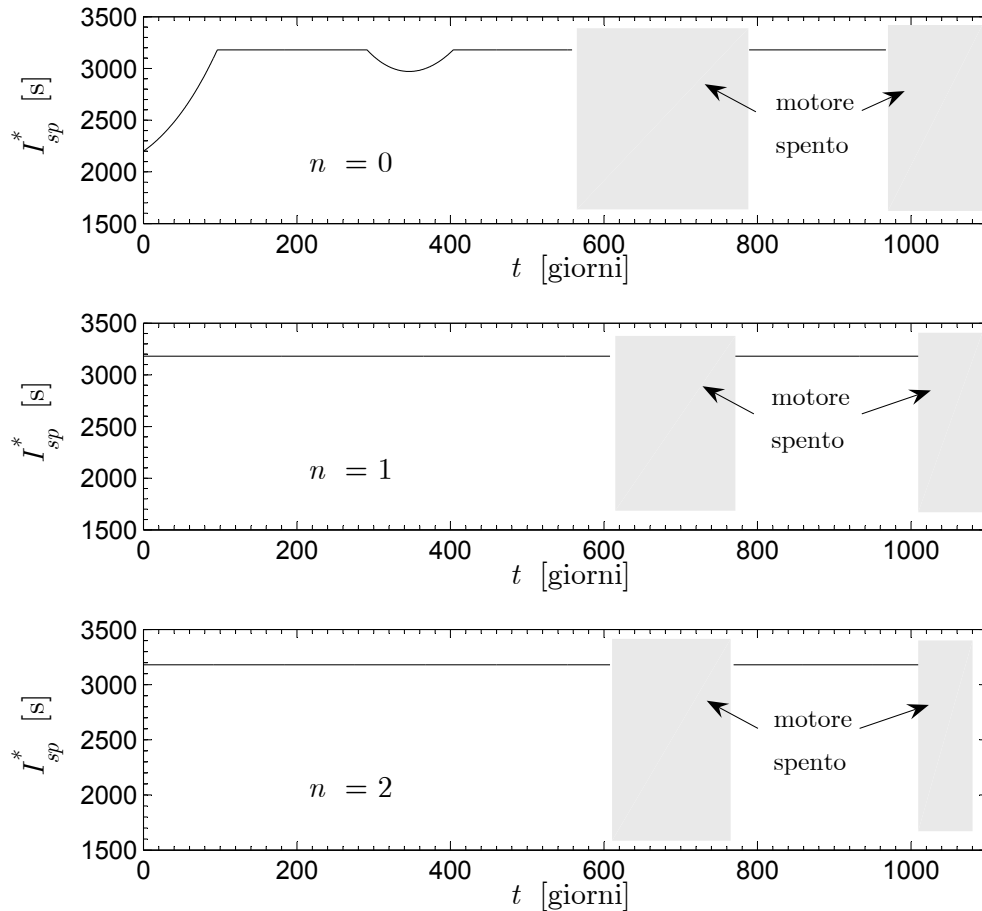


Figura 6.6: Storia temporale dell'impulso specifico in una missione di trasferimento verso Marte con un sistema NSTAR con data di partenza 1 Agosto 2006.

presenti delle modulazioni dell'impulso specifico e fasi in cui I_{sp} risulta massimo o minimo. Inoltre in ogni caso è presente un unico tratto di volo per inerzia con motore spento. Assumendo un eccesso iperbolico di arrivo sul pianeta Marte, i risultati per quel che riguarda il consumo di propellente sono i seguenti: $\Delta m = 321$ kg per $n = 0$, $\Delta m = 397$ kg per $n = 1$ e $\Delta m = 404$ kg per $n = 2$. Si osservi che la variazione quadratica dell'efficienza del propulsore comporta un incremento nel consumo di propellente del 25% rispetto al caso di η costante ($n = 0$).

6.6 Conclusioni

In questo Capitolo è stata presentata la legge di controllo ottima, dal punto di vista del consumo di propellente, per un trasferimento interplanetario effettuato con un veicolo spaziale il cui sistema propulsivo principale è costituito da un motore elettrico alimentato mediante un sistema di generazione di potenza basato su pannelli fotovoltaici. Il problema di ottimo è stato risolto ricorrendo ad un metodo indiretto classico.

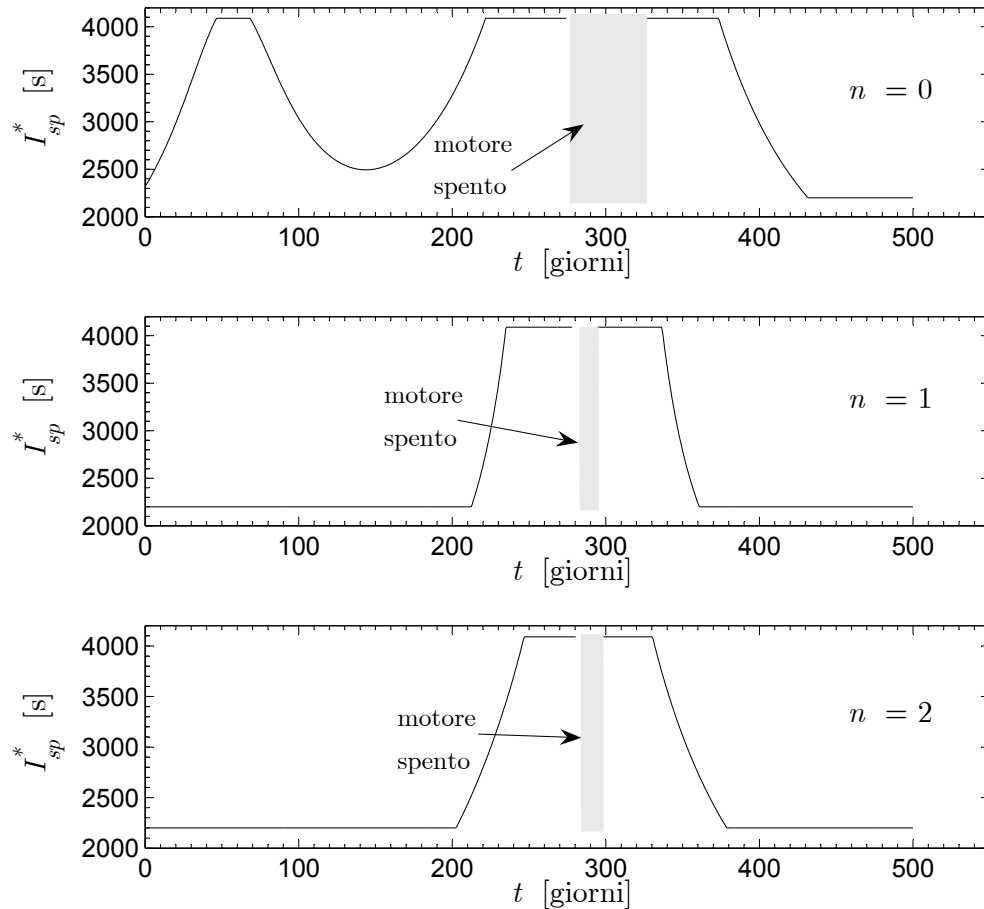


Figura 6.7: Storia temporale dell'impulso specifico in una missione di trasferimento verso Marte con un sistema NEXT con data di partenza 1 Aprile 2009.

Le novità della trattazione adottata rispetto a quanto già noto in letteratura consistono nell'introduzione di un modello più realistico del propulsore con la possibilità di tenere in conto la variazione dell'efficienza del sistema in funzione dell'impulso specifico utilizzato. Questa variazione è stata inserita nel modello attraverso un'espansione polinomiale di grado n i cui coefficienti possono essere scelti in maniera tale da interpolare al meglio i dati sperimentali noti. La formulazione utilizzata permette inoltre di tenere in conto eventuali spegnimenti del motore al fine di consentire dei tratti di volo per inerzia, come di solito accade nelle missioni reali.

Per quel che riguarda il valore ottimo dell'impulso specifico è stato osservato che quest'ultimo dipende strettamente dal modulo del *primer vector*, dalla massa istantanea del veicolo spaziale e dalla variabile aggiunta alla massa. Inoltre la struttura della legge di controllo per l'impulso specifico è correlata in maniera significativa ai coefficienti dell'espansione polinomiale dell'efficienza del sistema propulsivo.

Infine sono state simulate un certo numero di traiettorie di trasferimento verso Marte

tenendo in considerazione due particolari sistemi propulsivi e tre diversi gradi di approssimazione dell'efficienza. Le simulazioni hanno mostrato chiaramente che considerare l'efficienza costante introduce degli errori non trascurabili nella stima della massa minima di propellente necessaria ad effettuare la missione.

Appendici

Costanti fisiche e parametri planetari utilizzati

In questa appendice si riassumono la serie di parametri e costanti astrodinamiche^[28;44] utilizzate nelle simulazioni numeriche effettuate nella presente Tesi.

	Valore
giorno giuliano	86 400 s
anno giuliano	365.25 giorni
secolo giuliano	36 525 giorni
velocità della luce (c)	299 792 458 m/s
cost. di grav. univ. (G)	$6.67259 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
unità astronomica (AU)	$1.49597870691 \times 10^{11} \text{ m}$
par. grav. del Sole (μ_{\odot})	$1.32712440018 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Tabella A.1: Costanti fisiche ed astronomiche

	Valore
massa Sole/Mercurio	6 023 600
massa Sole/Venere	408 523.71
massa Sole/(Terra-Luna)	328 900.56
massa Sole/(Marte sistema)	3 098 708
massa Sole/(Giove sistema)	1 047.3486
massa Sole/(Saturno sistema)	3 497.898
massa Sole/(Urano sistema)	22 902.98
massa Sole/(Nettuno sistema)	19 412.24
massa Sole/(Plutone sistema)	1.35
massa Terra/Luna	0.012300034
par. grav. Terra (μ_{\oplus})	$398 600.4415 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Tabella A.2: Parametri fisici dei pianeti del Sistema Solare

Pianeta	a [AU]	e	i [deg]	Ω [deg]	$\tilde{\omega}$ [deg]	L [deg]
Mercurio ($\text{\textcircled{☿}}$)	0.38709893	0.20563069	7.00487	48.33167	77.45645	252.25084
Venere ($\text{\textcircled{♀}}$)	0.72333199	0.00677323	3.39471	76.68069	131.53298	181.97973
Terra ($\text{\textcircled{♁}}$)	1.00000011	0.01671022	0.00005	-11.26064	102.94719	100.46435
Marte ($\text{\textcircled{♂}}$)	1.52366231	0.09341233	1.85061	49.57854	336.04084	355.45332
Giove ($\text{\textcircled{♃}}$)	5.20336301	0.04839266	1.30530	100.55615	14.75385	34.40438
Saturno ($\text{\textcircled{♄}}$)	9.53707032	0.05415060	2.48446	113.71504	92.43194	49.94432
Urano ($\text{\textcircled{♅}}$)	19.19126393	0.04716771	0.76986	74.22988	170.96424	313.23218
Nettuno ($\text{\textcircled{♆}}$)	30.06896348	0.00858587	1.76917	131.72169	44.97135	304.88003
Plutone ($\text{\textcircled{♇}}$)	39.48168677	0.24880766	17.14175	110.30347	224.06676	238.92881

Tabella A.3: Parametri orbitali dei pianeti del Sistema Solare (J2000)

J_2	1.08263×10^{-3}
J_3	$-2.5321531 \times 10^{-6}$
J_4	$-1.6109876 \times 10^{-6}$
J_5	-0.15×10^{-6}
J_6	0.57×10^{-6}

Tabella A.4: Armoniche zonali terrestri.

Bibliografia

- [1] Gershman, R. e Seybold, C., “Propulsion Trades for Space Science Missions,” *Acta Astronautica*, Vol. 45, No. 4–9, 1999, pp. 541–548.
- [2] Leipold, M., Kassing, D., Eiden, M., e Herbeck, L., “Solar Sails for Space Exploration – The Development and Demonstration of Critical Technologies in Partnership,” ESA bulletin 98, June 1999.
- [3] Morrow, E., Scheeres, D. J., e Lubin, D., “Solar Sail Orbit Operations at Asteroids,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 38, No. 2, March–April 2001, pp. 279–286.
- [4] Racca, G. D., “New Challenges to Trajectory Design by the Use of Electric Propulsion and Other New Means of Wandering in the Solar System,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 85, 2003, pp. 1–24.
- [5] Sauer, Jr., C. G., “Solar Sail Trajectories for Solar Polar and Interstellar Probe Missions,” AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, AAS Paper 99-336, August 1999.
- [6] Anderson, J. L., “Roadmap to a Star,” *Acta Astronautica*, Vol. 44, No. 2–4, 1999, pp. 91–97.
- [7] McInnes, C. R., “Delivering Fast and Capable Missions to the Outer Solar System,” *Advances in Space Research*, Vol. 34, No. 1, 2004, pp. 184–191.
- [8] Garble, G. e Montgomery, E. E., “In-Space Propulsion Technologies Projects,” 39th AIAA Joint Propulsion Conference, Huntsville, AL, July 2003, Paper AIAA 2003-5274.
- [9] Leipold, M., Eiden, M., Garner, C. E., Herbeck, L., Kassing, D., Niederstadt, T., Krüger, T., Pagel, G., Rezazad, M., Rozemeijer, H., Seboldt, W., Schöppinger, C., Sickinger, C., e Unckenbold, W., “Solar Sail Technology Development and Demonstration,” *Acta Astronautica*, Vol. 52, No. 2–6, January–March 2003, pp. 317–326.
- [10] Seboldt, W. e Dachwald, B., “Solar Sailcraft of the First Generation Technology Development,” 54th International Astronautical Congress, Bremen, Germany, September–October 2003, IAC-03-S.6.03.

-
- [11] Dachwald, B., "Fast Solar System Escape Missions Using Non-Futuristic Solar Sails," Pioneer Anomaly Workshop, ZARM, Bremen, 18-19 May 2004.
- [12] McInnes, C. R., *Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications*, Springer-Praxis Series in Space Science and Technology, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [13] Forward, R. L., "Solar Photon Thrustor," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 27, No. 4, July-August 1990, pp. 411–416.
- [14] Groom, D., "Astrophysical Constants," Tech. rep., Particle Data Group, 2001, available online: <http://pdg.lbl.gov/2002/astrorpp.pdf>.
- [15] Sauer, Jr, C. G., "A comparison of Solar Sail and Ion Drive Trajectories for a Halley's Comet Rendezvous Mission," AAS Paper 77-104, American Astronautical Society, September 1977.
- [16] Wright, J. L. e Warmke, J. M., "Solar Sail Mission Applications," AIAA/AAS Astrodynamics Conference, San Diego, CA, 18–20 Aug. 1976, AIAA paper 76-808.
- [17] Friedman, L., "Solar Sailing - The concept Made Realistic," AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting, Huntsville, Alabama, 16–18 Jan. 1978, AIAA paper 78-82.
- [18] Zhukov, A. N. e Lebedev, V. N., "Variational Problem of Transfer Between Heliocentric Orbits by Means of Solar Sail," *Cosmic Research*, Vol. 2, 1964, pp. 41–44.
- [19] Sauer, Jr, C. G., "Optimum Solar-Sail Interplanetary Trajectories," AIAA/AAS Astrodynamics Conference, San Diego, CA, 18–20 Aug. 1976, AIAA Paper 76-0792.
- [20] Wood, L. J., Bauer, T. P., e P., Z. K., "Comment on Time-Optimal Orbit Transfer Trajectory for Solar Sail Spacecraft", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 2, March-April 1982, pp. 221–224.
- [21] Subba Rao, P. V. e Ramanan, R. V., "Optimum Rendezvous Transfer Between Coplanar Heliocentric Elliptic Orbits Using Solar Sail," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 15, No. 6, November-December 1992, pp. 1507–1509.
- [22] Simon, K. e Zakharov, Y., "Optimization of Interplanetary Trajectories with Solar Sail Propulsion," *Space Technology*, Vol. 16, No. 5–6, 1996, pp. 381–385.
- [23] Cichan, T. e Melton, R. G., "Optimal Trajectories for Non-Ideal Solar Sails," American Astronautical Society, AAS Paper 01-471, July-August 2001.
- [24] Colasurdo, G. e Casalino, L., "Optimal Control Law for Interplanetary Trajectories with Nonideal Solar Sail," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 40, No. 2, March-April 2003, pp. 260–265.
- [25] Lewis, F. L. e Syrmos, V. L., *Optimal Control*, John Wiley & Sons, New York, 2^o ed., 1995, pp. 284–290.
- [26] Lawden, D. F., *Optimal Trajectories for Space Navigation*, Butterworths, London, 1963, pp. 54–68.
- [27] Bryson, A. E. e Ho, Y. C., *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Corporation, 1975.

-
- [28] Seidelmann, K. P., editor, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, Cap. 5, University Science Books, Mill Valley, California, 1992, p. 316, Table 5.8.1.
- [29] Meeus, J., *Astronomical Algorithms*, Willmann Bell Inc., Richmond, VA, 1991, pp. 202–204.
- [30] Coleman, T. F. e Li, Y., “An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds,” *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 6, No. 2, May 1996, pp. 418–445.
- [31] Lagarias, J. C., Reeds, J. A., Wright, M. H., e Wright, P. E., “Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions,” *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 9, No. 1, 1998, pp. 112–147.
- [32] Goldberg, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley, New York, 1989, pp. 27–86.
- [33] Shampine, L. F. e Gordon, M. K., *Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem*, Cap. 10, W. H. Freeman, San Francisco, 1975.
- [34] Shampine, L. F. e Reichelt, M. W., “The MATLAB ODE Suite,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 18, No. 1, January 1997, pp. 1–22.
- [35] Coverstone, V. L. e Prussing, J. E., “Technique for Escape from Geosynchronous Transfer Orbit Using a Solar Sail,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 4, July-August 2003, pp. 628–634.
- [36] Dachwald, B., “Interplanetary Mission Analysis for Non-Perfectly Reflecting Solar Sailcraft Using Evolutionary Neurocontrol,” AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, AAS Paper 03-579, August 2003.
- [37] Pitjeva, E. V., “Modern Numerical Ephemerides of Planets and the Importance of Ranging Observations for Their Creation,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 80, No. 3, July 2001, pp. 249–271.
- [38] Sands, N., “Escape from Planetary Gravitational Fields by Use of Solar Sails,” *American Rocket Society Journal*, Vol. 31, No. 4, 1961, pp. 527–531.
- [39] Fimple, W. R., “Generalized Three-Dimensional Trajectory Analysis of Planetary Escape by Solar Sail,” *American Rocket Society Journal*, Vol. 32, No. 6, 1962, pp. 883–887.
- [40] Sackett, L. L. e Edelbaum, T. N., “Optimal Solar Sail Spiral to Escape,” AAS/AIAA *Astrodynamics Specialist Conference*, American Astronautical Society and American Institute of Aeronautics and Astronautics, Jackson Hole, Wyo., September 7-9 1977.
- [41] Macdonald, M. e McInnes, C. R., “Analytic Control Laws for Near-Optimal Geocentric Solar Sail Transfers,” AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Quebec City, Canada, July 30-August 2 2001, Paper AAS 01-472.
- [42] Fekete, T. A., Sackett, L. L., e von Flotow, A. H., “Trajectory Design for Solar Sailing from Low-Earth Orbit to the Moon,” *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 79, February 1992, pp. 1083–1094.

-
- [43] Leipold, M., *Solar Sail Mission Design*, Ph.D. thesis, Technische Universität München, February 2000, DLR FB 2000 22.
- [44] Standish, E. M., “Report of the IAU WGAS Sub-group on Numerical Standards,” Tech. rep., IAU Working Group on Astronomical Standards, available online: <http://ssd.jpl.nasa.gov/iau-comm4/iausgnrpt.ps>.
- [45] Battin, R. H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, AIAA, New York, 1987, pp. 387–391.
- [46] Roy, A. E., *Orbital Motion*, Advances in Design and Control, Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 3^o ed., 1988, pp. 511–512.
- [47] Montenbruck, O. e Gill, E., *Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2000, pp. 81–83.
- [48] Standish, E. M., “Orientation of the JPL Ephemerides, DE200/LE200, to the Dynamical Equinox of J2000,” *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 114, No. 2, October 1982, pp. 297–302.
- [49] Standish, E. M., “The Observational Basis for JPL’s DE200, the Planetary Ephemerides of the Astronomical Almanac,” *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 233, No. 1, July 1990, pp. 252–271.
- [50] Hartmann, J. W., “Escape from Earth Using a Solar Sail,” Final rept. for AAE 493 independent study, Dept. of Aeronautical and Astronautical Engineering, University of Illinois, Urbana-Champaign, IL., February 2003.
- [51] Macdonald, M. e McInnes, C. R., “Seasonal Efficiencies of Solar Sailing in Planetary Orbit,” 53rd International Astronautical Congress, Houston, Texas, 10-19 October 2002, IAC-02-S.6.01.
- [52] Leipold, M., Garner, C. E., Freeland, R., Herrmann, A., Noca, M., Pagel, G., Seboldt, W., Sprague, G., e Unckenbold, W., “ODISSEE – A Proposal for Demonstration of a Solar Sail in Earth Orbit,” *Acta Astronautica*, Vol. 45, No. 4–9, 1999, pp. 557–566.
- [53] Fieseler, P. D., “A Method for Solar Sailing in a Low Earth Orbit,” *Acta Astronautica*, Vol. 43, No. 9–10, November 1998, pp. 531–541.
- [54] Hedin, A. E., “Extension of the MSIS Thermosphere Model into the Middle and Lower Atmosphere,” *Journal of Geophysical Research*, Vol. 96, No. A2, February 1991, pp. 1159–1172.
- [55] Hughes, P. C., *Spacecraft Attitude Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986, pp. 248–280.
- [56] NASA Space Vehicle Design Criteria, “Spacecraft Aerodynamic Torques,” NASA SP-8058, January 1971.
- [57] McInnes, C. R., “Inverse Solar Sail Trajectory Problem,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 2, 2003, pp. 369–371.
- [58] McInnes, C. R., “Mission Applications for High Performance Solar Sails,” 3rd IAA

- Conference on Low Cost Planetary Missions, California Institute of Technology, Pasadena (CA), 27th April–1st May 1998, IAF-ST-W.1.05.
- [59] Mengali, G. e Quarta, A. A., “Time-Optimal Three-Dimensional Trajectories for Solar Photon Thruster Spacecraft,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2004, accepted for publication.
- [60] Rayman, M. D., Varghese, P., Lehman, D. H., e Livesay, L. L., “Results from the Deep Space 1 Technology Validation Mission,” *Acta Astronautica*, Vol. 47, No. 2–9, July–November 2000, pp. 475–487.
- [61] Brophy, J. R. e Noca, M., “Electric Propulsion for Solar System Exploration,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 14, No. 5, September–October 1998, pp. 700–707.
- [62] Brophy, J. R., “Advanced Ion Propulsion Systems for Affordable Deep-Space Missions,” *Acta Astronautica*, Vol. 52, No. 2-6, January–March 2003, pp. 309–316.
- [63] Williams, S. N. e Coverstone-Carroll, V., “Benefits of Solar Electric Propulsion for the Next Generation of Planetary Exploration Missions,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 45, No. 2, April–June 1997, pp. 143–159.
- [64] Williams, S. N. e Coverstone-Carroll, V., “Mars Missions Using Solar Electric Propulsion,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 37, No. 1, January–February 2000, pp. 71–77.
- [65] Kluever, C. A., “Comet Rendezvous Mission Design Using Solar Electric Propulsion Spacecraft,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 37, No. 5, September–October 2000, pp. 698–700.
- [66] Sauer, Jr., C. G., “Solar Electric Performance for Medlite and Delta Class Planetary Missions,” AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, AAS Paper 97-726, 1997.
- [67] Scheel, W. e Conway, B. A., “Optimization of Very-Low-Thrust, Many-Revolution Spacecraft Trajectories,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 17, No. 6, November–December 1994, pp. 1185–1192.
- [68] Tang, S. e Conway, B. A., “Optimization of Low-Thrust Interplanetary Trajectories Using Collocation and Nonlinear Programming,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 18, No. 3, May–June 1995, pp. 599–604.
- [69] Hartmann, J. W., Coverstone-Carroll, V., e Williams, S. N., “Optimal Interplanetary Spacecraft Trajectories via a Pareto Genetic Algorithm,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 46, No. 3, 1998, pp. 267–282.
- [70] Kluever, C. A., “Optimal Low-Thrust Interplanetary Trajectories by Direct Method Techniques,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 45, No. 3, 1997, pp. 247–262.
- [71] Kechichian, J. A., “Optimal Low-Thrust Transfer Using Variable Bounded Thrust,” *Acta Astronautica*, Vol. 36, No. 7, 1995, pp. 357–365.
- [72] Carter, T. E. e Pardis, C. J., “Optimal Power-Limited Rendezvous with Upper and

- Lower Bounds on Thrust,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 19, No. 5, September-October 1996, pp. 1124–1133.
- [73] Vadali, S. R., Nah, R. S., Braden, E., e Johnson, Jr., I. L., “Fuel-Optimal Planar Earth-Mars Trajectories Using Low-Thrust Exhaust-Modulated Propulsion,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 3, May-June 2000, pp. 476–482.
- [74] Nah, R. S., Vadali, S. R., e Braden, E., “Fuel-Optimal, Low-Thrust, Three-Dimensional Earth-Mars Trajectories,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 24, No. 6, November-December 2001, pp. 1100–1107.
- [75] Auweter-Kurtz, M. e Kurtz, H., “Optimization of Electric Thrusters for Primary Propulsion Based on the Rocket Equation,” *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 19, No. 3, May-June 2003, pp. 413–423.
- [76] Sauer, Jr., C. G., “Modeling of Thruster and Solar Array Characteristics in the JPL Low-Thrust Trajectory Analysis,” 13th International Electric Propulsion Conference, AIAA Paper 78-645, San Diego, CA, 1978.
- [77] Brophy, J. R. et al., “Ion Propulsion System (NSTAR) DS1 Technology Validation Report,” Tech. Rep. JPL 00-10, Jet Propulsion Laboratory, 4800 Oak Grove Ave., Pasadena, CA 91109, October 2000.
- [78] Soulas, G. C., Domonkos, M. T., e Patterson, M., “Wear Test Results for the NEXT Ion Engine,” 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA paper 2003-4863, Huntsville, Alabama, 20-23 July 2003.
- [79] Seidelmann, P. K., *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, University Science Books, California, 1992, pp. 696–697.
- [80] Dachwald, B., “Minimum Transfer Times for Nonperfectly Reflecting Solar Sailcraft,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 41, No. 4, July-August 2004, pp. 693–695.

Elenco delle figure

1.1	Illustrazione tratta dalla prima pubblicazione riguardante una vela solare: “ <i>Clipper Ships of Space</i> ”, scritto da Carl Wiley nel 1951 su <i>Astounding Science Fiction</i>	7
1.2	Configurazione di un veicolo spaziale per l’esplorazione marziana propulso a vela solare e stabilizzato a spin, proposto da Philippe Villers al Massachusetts Institute of Technology nel 1960.	9
1.3	Configurazione di lancio ed in volo della vela Cosmos 1 della società privata Planetary Society attualmente in fase avanzata di sviluppo nel centro russo di Babakin. La Cosmos 1 sarà la prima vela solare al mondo ad essere utilizzata come sistema di propulsione primario in una missione spaziale. . .	11
1.4	Prova di svolgimento di una vela solare quadrata delle dimensioni di 20 m × 20 m condotta nel dicembre del 1999 a Colonia nell’istituto dell’ESA CTC da parte del German Aerospace Center (DLR).	12
1.5	Programma della NASA e del NOAA/USAF per i prossimi quindici anni riguardante l’utilizzo di una vela solare come sistema propulsivo primario in una missione spaziale.	12
1.6	Densità e superficie della vela per alcuni prototipi in fase di studio.	13
2.1	Variazione della pressione di radiazione solare con la distanza r dal Sole. . .	17
2.2	Sistemi di riferimento.	18
2.3	Angoli caratteristici della vela.	19
2.4	Visualizzazione dell’angolo di cono α	19
2.5	Accelerazione normalizzata della vela in funzione dell’angolo di controllo α nel caso di vela convenzionale e modello ideale.	20
2.6	Area proiettata dalla vela convenzionale.	21
2.7	Riflessione speculare nella vela convenzionale, modello ideale.	21
2.8	Accelerazione normalizzata della vela in funzione dell’angolo di controllo α nel caso di vela convenzionale e modello ottico (strato di alluminio-Kapton).	23

2.9	Angoli caratteristici della vela nel modello di forza parametrico.	25
2.10	Accelerazione normalizzata della vela nel modello di forza parametrico per JPL <i>Square Sail</i> e <i>Heliogyro</i>	26
2.11	Schema semplificato della vela composta o SPT (non in scala).	27
2.12	Schema semplificato del collettore nella vela SPT (non in scala).	28
2.13	Schema semplificato del riflettore nella vela SPT con una riflessione speculare dei raggi solari (non in scala).	29
2.14	Zona d'ombra del collettore dovuta alla presenza del riflettore (non in scala).	29
2.15	Rapporto tra i raggi del riflettore R_r e del collettore R_c in funzione del rapporto di concentrazione χ	31
2.16	Angolo ξ_1 del collettore in funzione dell'angolo ξ_0 e del fattore di concentrazione χ	32
2.17	Rapporto A_c/A_{c_p} in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore e del fattore di concentrazione χ	33
2.18	Ingombro totale della vela composta.	34
2.19	Lunghezza e diametro massimi della vela composta in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore e del fattore di concentrazione χ	35
2.20	Superficie proiettata del collettore (adimensionalizzata) in funzione del rapporto R_c/L	36
2.21	Angoli che definiscono l'orientamento del versore normale allo specchio direttore $\hat{\mathbf{n}}_d$ in \mathcal{T}_{orb} per una vela composta.	38
2.22	Accelerazione normalizzata della vela in funzione dell'angolo di controllo α nel caso di vela composta (SPT) e di vela convenzionale con modello ideale di forza.	38
2.23	Superficie elementare sulla zona riflettente del collettore.	39
2.24	Coefficiente di forza \mathcal{A}' in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore e del fattore di concentrazione χ per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).	45
2.25	Accelerazione adimensionalizzata $a'_o/(P A_{c_p}/m)$ nel modello di forza ottico in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore ($\chi = 100$) e dell'angolo di cono del direttore α per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).	46
2.26	Angolo α_{io} in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore ($\chi = 100$) per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).	47
2.27	Massimo valore $\max(a'_o)/(P A_{c_p}/m)$ dell'accelerazione adimensionalizzata in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore ($\chi = 100$) per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).	48

2.28	Valore di $\max \left \frac{a_i}{P A_{c_p}/m} - \frac{a_o}{P A_{c_p}/m} \right $ in funzione dell'angolo ξ_0 del collettore ($\chi = 100$) per una vela composta avente come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).	49
2.29	Accelerazione caratteristica a_c in funzione del parametro di snellezza β per una vela convenzionale e per una vela composta ($\chi = 100$ e $\xi_0 = 15$ deg per il modello ottico) aventi come materiale riflettente un doppio strato di Alluminio-Kapton (cfr. Tabella 2.1).	51
3.1	Sistema di riferimento utilizzato nella scrittura delle equazioni del moto. . .	53
3.2	Angoli che definiscono l'orientamento del versore di spinta in \mathcal{T}_{orb} nel modello di forza parametrico relativo ad una vela convenzionale.	56
3.3	Sfera o "bolla" di esistenza dell'accelerazione normalizzata \tilde{a} nel caso di vela composta con modello di forza ideale.	57
3.4	Angoli che definiscono l'orientamento del primer vector nel sistema di riferimento orbitale.	58
3.5	Angolo di cono ottimale per vela solare convenzionale con modello di forza ideale ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$).	61
3.6	Legame il versore normale alla vela e primer vector.	62
3.7	Angolo di cono ottimale per vela solare convenzionale con modello di forza ottico ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$). I coefficienti di forza sono quelli relativi alla JPL <i>Square Sail</i> (cfr. Tabella 2.1)	64
3.8	Angolo di cono ottimale per vela solare convenzionale con modello di forza parametrico ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$). I coefficienti di forza sono quelli relativi alla JPL <i>Square Sail</i> (cfr. Tabella 2.1)	66
3.9	Interpretazione geometrica dell'equazione che fornisce l'angolo di cono ottimale nel caso di vela composta con modello di forza ideale.	67
3.10	Angolo di cono del direttore ottimale per vela solare composta con modello di forza ottico ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$). I coefficienti di forza sono quelli riportati nella Tabella 2.3.	69
3.11	Controllo sulla condizione di convessità per la legge di controllo (3.52) riguardante l'angolo di cono del direttore ottimale per vela solare composta con modello di forza ottico ($\tan \delta = \tan \delta_\lambda$). I coefficienti di forza sono quelli riportati nella Tabella 2.3.	70
3.12	Tempo di missione per un <i>rendez-vous</i> con Marte per una vela convenzionale con i tre modelli forza ideale, ottico e parametrico.	74
3.13	Angoli di controllo della vela convenzionale per una traiettoria di <i>rendez-vous</i> con Marte con partenza dalla Terra il 21 dicembre 2015).	75
3.14	Proiezione sul piano dell'eclittica della traiettoria di <i>rendez-vous</i> con Marte con partenza dalla Terra il 21 dicembre 2015.	76

3.15	Tempo minimo di trasferimento bidimensionale verso Marte in funzione del parametro di snellezza β per una vela composta (modello ideale ed ottico) e per una vela convenzionale (modello ideale ed ottico).	78
3.16	Tempo minimo di trasferimento bidimensionale verso Venere in funzione del parametro di snellezza β per una vela composta (modello ideale ed ottico) e per una vela convenzionale (modello ideale ed ottico).	79
3.17	Tempo minimo di trasferimento tridimensionale verso Marte per una vela composta con modello di forza ideale ed ottico.	80
3.18	Tempo minimo di trasferimento tridimensionale verso Venere per una vela composta con modello di forza ideale ed ottico.	81
4.1	Sistemi di riferimento adottati e parametri geometrici caratteristici del problema nello studio di traiettorie di fuga dalla Terra.	84
4.2	Tempo di fuga dalla Terra per una vela convenzionale e composta con modello di forza ideale e per i tre modelli di ambiente spaziale considerati. .	89
4.3	Variazione temporale dell'energia meccanica specifica per una vela convenzionale con due modelli di ambiente spaziale (a, c) per una data di partenza 21/11/2004.	90
4.4	Grafico tridimensionale della traiettoria seguita dalla vela solare (data di partenza 21/11/2004) convenzionale e composta. I quadratini neri rappresentano la posizione della vela dopo 70 giorni dalla partenza, i cerchi bianchi corrispondono al raggiungimento dell condizioni di fuga. Le croci indicano il tempo in intervalli di due giorni.	91
4.5	Angoli caratteristici della vela nello studio di un innalzamento orbitale da orbita bassa.	93
4.6	Variazione del parametro f con la quota e con l'attività solare ($P_{\oplus} \cong 9.114 \times 10^{-6}$ Pa).	94
4.7	Regione del piano (α, α_v) dove $J = 0$ (linea continua), $J > 0$ (in grigio), ed i corrispondenti massimi di J (insieme \mathcal{S} , linea tratto-punto) per differenti valori di f	97
4.8	Legge di controllo quasi-ottima per l'angolo di cono nei due casi descritti dalle equazioni (4.41) (linea continua) e (4.42) (linea tratteggiata)	99
4.9	Intervallo di tempo necessario a raddoppiare la quota iniziale (650 km) della vela solare convenzionale con modello di forza ideale trascurando la resistenza atmosferica.	100

4.10	Intervallo di tempo necessario a raddoppiare la quota iniziale (650 km) utilizzando la legge di controllo quasi ottima (4.41)–(4.43) (linea con cerchi, Caso 1) e utilizzando la legge di controllo ideale (4.33) con la presenza degli effetti perturbativi della resistenza aerodinamica (linea con i quadrati, Caso 2).	101
4.11	Storie temporali dell'angolo di cono della vela nel caso di legge quasi-ottima con e senza la perturbazione dovuta alla resistenza aerodinamica ($a_c = 1 \text{ mm/s}^2$).	102
4.12	Tempi di fuga con partenza da orbita bassa utilizzando la legge di controllo quasi-ottima in assenza (quadrati) ed in presenza (cerchi) della resistenza atmosferica. Con una linea tratteggiata è stata indicata la soluzione analitica approssimata derivata da McInnes ^[12]	103
4.13	Storia temporale della variabile f in una traiettoria di fuga con partenza da orbita bassa ($a_c = 1 \text{ mm/s}^2$).	103
5.1	Condizione di eliostazionarietà raggiunta utilizzando una vela solare.	105
5.2	Sistema di riferimento polare.	107
5.3	Definizione dell'angolo di controllo α	109
5.4	Orbita di parcheggio.	111
5.5	Angolo α_λ del primer vector λ	112
5.6	Traiettorie di minimo tempo (r_f non vincolato) per la condizione di eliostazionarietà (cerchio nero) per una vela convenzionale (modello ideale, ottico e parametrico) e per una vela SPT modello ideale.	115
5.7	Caratteristiche dell'orbita di trasferimento di minimo tempo (r_f non vincolato) con partenza da orbita di parcheggio terrestre ($e = e_\oplus = 0.01671022$).	116
5.8	Caratteristiche dell'orbita di trasferimento di minimo tempo (r_f non vincolato) con partenza da orbita di parcheggio marziana ($e = e_\ominus = 0.09341233$).	117
5.9	Caratteristiche dell'orbita di trasferimento di minimo tempo (r_f vincolato) con partenza da orbita circolare ($e = 0$).	118
5.10	Orbita di trasferimento di minimo tempo ($r_f = \bar{r}_f \equiv r_0$) con partenza da orbita circolare ($e = 0$).	119
6.1	Approssimazione polinomiale dell'efficienza del propulsore η in funzione dell'impulso specifico I_{sp} per il sistema NSTAR.	129
6.2	Approssimazione polinomiale dell'efficienza del propulsore η in funzione dell'impulso specifico I_{sp} per il sistema NEXT.	130
6.3	Regione ammissibile \mathcal{S} per un'approssimazione quadratica di η in funzione I_{sp} relativa al propulsore NSTAR.	131
6.4	Regione ammissibile \mathcal{S} per un'approssimazione quadratica di η in funzione I_{sp} relativa al propulsore NEXT.	131

6.5 Valore ottimo dell'impulso specifico in funzione del parametro f per il propulsore NSTAR e NEXT nel caso di $n = 0,1$ e 2 133

6.6 Storia temporale dell'impulso specifico in una missione di trasferimento verso Marte con un sistema NSTAR con data di partenza 1 Agosto 2006. . 135

6.7 Storia temporale dell'impulso specifico in una missione di trasferimento verso Marte con un sistema NEXT con data di partenza 1 Aprile 2009. . . . 136

Elenco delle tabelle

2.1	Coefficienti di forza per una vela ideale e per una vela reale avente uno strato di alluminio-Kapton come superficie riflettente.	22
2.2	Coefficienti di forza per una vela reale (JPL <i>Square Sail</i> e <i>Heliogyro</i>) avente un modello di forza parametrico e materiale riflettente costituito da un doppio strato di alluminio-Kapton.	27
2.3	Coefficienti di forza \mathcal{A}' , \mathcal{B}' e \mathcal{C}' per una vela composta avente uno strato di alluminio-Kapton come superficie riflettente ($\xi_0 = 15$ deg e $\chi = 100$ con un conseguente $\xi_1 = 1.4831$ deg) e confrontato con il caso ideale.	44
5.1	Coefficienti di forza della vela (derivati dal modello JSS).	108
5.2	Caratteristiche dell'orbita di trasferimento di minimo tempo (r_f non vincolato) con partenza da una generica orbita di parcheggio circolare ($e = 0$) di semiasse maggiore a	114
5.3	Tempi minimi di trasferimento (r_f non vincolato) verso la condizione di eliostazionarietà con partenza dall'orbita della Terra attorno al Sole ($a = 1$ AU) supposta circolare ($e = 0$).	114
6.1	Coefficienti polinomiali per l'efficienza del propulsore η relativi ai sistemi NSTAR e NEXT.	128
6.2	Coefficienti empirici relativi alle prestazioni del sistema di generazione di potenza basato sull'utilizzo di pannelli fotovoltaici.	133
A.1	Costanti fisiche ed astronomiche	139
A.2	Parametri fisici dei pianeti del Sistema Solare	139
A.3	Parametri orbitali dei pianeti del Sistema Solare (J2000)	140
A.4	Armoniche zonali terrestri.	140

Elenco degli acronimi

HPSS *High Performance Solar Sail*

SPT *Solar Photon Thruster*

JSS *JPL Square Sail*

TPBVP *Two Point Boundary Value Problem, Problema dei due punti*

JPL *Jet Propulsion Laboratory*

PMP *Pontryagin's Maximum Principle*

MJD *Modified Julian Date, Data Giuliana Modificata*

GTO *Geosynchronous Transfer Orbit*

LEO *Low Earth Orbit*

DS1 *Deep Space 1*

SEP *Solar Electric Propulsion*

PPU *Power Processing Unit*

NSTAR *NASA SEP Technology Application Readiness*

NEXT *NASA's Evolutionary Xenon Thruster*

NASA *National Aeronautics and Space Administration*