

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

---

Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

**Sviluppo di un modello parametrico  
di vela solare**



Relatori:  
Prof. Giovanni Mengali

Laureando:  
Raffaele Micheletti

Prof. Carlo Casarosa

Correlatore:  
Ing. Alessandro Quarta

---

ANNO ACCADEMICO 2005/2006

*Alla mia famiglia*

# Indice

<b>Indice</b>	<b>i</b>
<b>Sommario</b>	<b>iv</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>v</b>
<b>Elenco dei simboli</b>	<b>vi</b>
<b>I Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 LE VELE SOLARI</b>	<b>2</b>
1.1 Introduzione generale . . . . .	2
1.2 Panoramica sulle più comuni configurazioni . . . . .	3
1.2.1 Vela Circolare stabilizzata a spin . . . . .	3
1.2.2 Vela Quadrata stabilizzata a tre assi . . . . .	4
1.2.3 Heliogyro stabilizzata a spin . . . . .	6
1.2.4 Solar Photon Thrustor . . . . .	6
1.3 Missioni con vele solari . . . . .	7
1.4 La fisica della propulsione con vele solari . . . . .	9
1.4.1 La pressione di radiazione solare . . . . .	9
1.4.2 La forza legata alla pressione di radiazione solare . . . . .	10
<b>2 IL PROBLEMA DELLA PARAMETRIZZAZIONE</b>	<b>12</b>
2.1 L'accelerazione caratteristica . . . . .	12

---

2.2	L'importanza della parametrizzazione . . . . .	13
<b>II Descrizione del modello e della formula paramet-</b>		
<b>rica</b>		<b>15</b>
<b>3 LA VELA QUADRATA</b>		<b>16</b>
3.1	Il modello a cinque punti di contatto . . . . .	16
3.2	Bracci . . . . .	17
3.3	Membrana . . . . .	19
<b>4 LA FORMULA PARAMETRICA</b>		<b>21</b>
4.1	Suddivisione della densità $\sigma_{tot}$ . . . . .	21
4.2	La densità della membrana $\sigma_m$ . . . . .	23
4.3	La densità dei bracci $\sigma_b$ . . . . .	24
4.3.1	La forza di drizza . . . . .	24
4.3.2	Instabilità globale . . . . .	25
4.3.3	Termini correttivi per l'instabilità globale . . . . .	27
4.3.4	Espressione iniziale della formula parametrica . . . . .	28
4.4	Il legame tra il raggio degli alberi e il lato vela . . . . .	29
4.5	L'instabilità locale . . . . .	31
4.5.1	La rigidità dei vincoli ai nodi . . . . .	34
4.5.2	Il coefficiente per l'instabilità locale . . . . .	36
4.6	Espressione finale della formula parametrica . . . . .	37
<b>III Risultati ottenuti</b>		<b>38</b>
<b>5 CURVE DELLE DENSITÀ</b>		<b>39</b>
5.1	La densità dei bracci $\sigma_b$ . . . . .	39
5.2	La densità strutturale $\sigma_s$ . . . . .	41
5.3	La densità totale $\sigma_{tot}$ . . . . .	41

<b>6</b>	<b>STUDIO DI SENSIBILITÀ</b>	<b>48</b>
6.1	I parametri più importanti . . . . .	48
6.1.1	Sensibilità a $e_0$ . . . . .	49
6.1.2	Sensibilità a $\tau$ . . . . .	49
6.1.3	Sensibilità a $a$ . . . . .	49
6.1.4	Sensibilità a $e_1$ . . . . .	49
<b>IV</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>58</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI</b>	<b>59</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>61</b>

## **Sommario**

Lo scopo di questo lavoro è lo sviluppo di un modello parametrico per lo studio del peso di una vela solare.

È stato scelto come modello di vela quella quadrata formata da un corpo centrale, quattro alberi e quattro triangoli di membrana a formare un quadrato. Dopo aver deciso le percentuali in peso dei vari componenti si è studiato il minimo peso della membrana e degli alberi tale da sopportare i carichi applicati alla vela.

Si è così ottenuta la formula parametrica che lega il peso della vela solare alla lunghezza del suo lato, si è aggiunto poi il peso del carico pagante ottenendo il peso totale della vela.

Infine è stato fatto uno studio di sensibilità ai parametri da cui questa formula dipende.

## **Ringraziamenti**

Desidero ringraziare sentitamente il professor Giovanni Mengali per la sua disponibilità e attenzione durante questo lavoro di Tesi e l'ing. Alessandro Quarta per i preziosi consigli.

## **Elenco dei simboli**

$P$  Pressione di radiazione solare

$W$  Flusso di energia nell'unità di tempo della radiazione solare

$c$  Velocità della luce

$W_{\oplus}$  Flusso di energia che arriva sulla Terra

$r_{\oplus}$  Distanza Terra-Sole

$r_1$  Distanza della vela dal Sole

$F_n$  Forza normale alla superficie

$F_s$  Forza in direzione dei raggi solari

$\rho_s, \rho_a, \rho_d$  Percentuale di fotoni riflessi, assorbiti, diffusi

$\theta$  Declinazione del Sole

$m$  Massa

$v_f$  Velocità

$a_c$  Accelerazione caratteristica

$\eta$  Rendimento

$\sigma_{tot}$  massa totale della vela fratto area

$A$  Area

$\sigma_s$  massa strutturale della vela fratto area

$\sigma_b$  massa bracci della vela fratto area

- $\sigma_m$  massa membrana della vela fratto area
- $\sigma_p$  massa carico pagante fratto area
- $\sigma_{stow.}$  massa sistemi stoccaggio della vela fratto area
- $\sigma_{m.c.}$  massa meccanismi centrali della vela fratto area
- $\sigma_{cont.b.}$  massa sistemi controllo bracci fratto area
- $\sigma_{strum.}$  massa strumentazione della vela fratto area
- $F_H$  forza di compressione degli alberi
- $\sigma_{nom}$  tensione membrana
- $\alpha$  angolo tra direzione longitudinale dell'albero e direzione della corda che tende la membrana
- $t$  spessore membrana
- $l$  lato vela quadrata
- $E$  modulo elastico
- $I$  momento d'inerzia
- $c_1$  coefficiente di vincolo globale
- $L_1$  lunghezza libera d'inflessione del braccio
- $L$  lunghezza braccio per vela quadrata
- $r$  raggio longherone
- $R$  raggio braccio
- $\bar{\rho}$  densità lineare dei bracci
- $M_B$  massa totale dei bracci

$P_{cr}$  carico critico

$e_0$  massima deformazione braccio

$f$  fattore correttivo

$\tau$  fattore correttivo imperfezioni iniziali

$S.F.$  coefficiente di sicurezza

$c_2$  coefficiente di vincolo locale

$l_b$  lunghezza baia

$a$  coefficiente di proporzionalità tra  $R$  e  $l_b$

$e_1$  termine noto nell'equazione che lega  $R$  e  $l_b$

$K$  rigidezza dei vincoli ai nodi dell'albero

$h$  rigidezza distribuita lungo la baia

$v$  spostamento in direzione trasversale del nodo

$z$  direzione longitudinale rispetto al longherone

$\xi$  variabile adimensionale

$K_I$  costante dell'equazione parametrica

# Parte I

## Introduzione

# Capitolo 1

## LE VELE SOLARI

*In questo capitolo viene fatta una breve panoramica sulle vele solari, le missioni in cui sono generalmente impiegate e la fisica che spiega il loro funzionamento.*

### 1.1 Introduzione generale

Comunemente i sistemi propulsivi utilizzano reazioni esotermiche o forze elettromagnetiche per dare ai veicoli spaziali le accelerazioni volute.

Nel caso delle vele solari la forza propulsiva viene dall'energia rilasciata dalle stelle sotto forma di radiazione elettromagnetica. La cosa che rende interessante questa fonte di energia è che essa è praticamente inesauribile. La sola cosa che può ridurre nel tempo la spinta è la degradazione del film riflettente. I problemi legati agli altri tipi di sistema propulsivo, come l'ingombro e il peso del propellente nel caso di motori chimici o la massa dell'impianto di potenza nel caso di motori elettrici, vengono risolti brillantemente nel caso delle vele solari avendo a che fare con una fonte di energia esterna anche se si ha in questo caso un ingombro notevole dato dalla vela.

Uno dei problemi che nasce dall'uso di vele solari è che la spinta, se pur inesauribile, è abbastanza modesta. Da qui l'importanza estrema dello studio

del peso totale della vela.

## 1.2 Panoramica sulle più comuni configurazioni

Esiste una grande varietà di configurazioni delle vele solari. Ciascuna configurazione ha in comune con le altre la presenza di un grande specchio riflettente che raccoglie la radiazione proveniente dalla stella. A questo specchio è collegato il corpo centrale costituito dal carico pagante e dai sistemi di bordo quali i sistemi di navigazione e controllo di assetto, il sistema di controllo termico, la struttura di rinforzo e supporto.

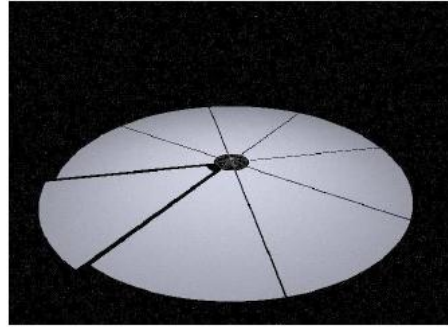
Al fine di dare un'esauriente panoramica introduttiva sull'argomento, vengono ora descritte le principali configurazioni scelte per la realizzazione di vele solari.

Le principali configurazioni sono:

- Vela Circolare
- Vela Quadrata
- Heliogyro
- Solar Photon Thruster.

### 1.2.1 Vela Circolare stabilizzata a spin

Nella vela circolare o Disc Solar Sail è l'effetto centrifugo, dato dalla veloce rotazione intorno all'asse della vela, a mantenere la membrana riflettente piatta senza la presenza di pesanti strutture di sostegno come bracci e tiranti. Come si vede nella Figura 1.1 la vela è formata da una serie di *spicchi* che



**Figura 1.1:** Disc Solar Sail

dopo il dispiegamento vanno a formare una corona circolare.

Solitamente la parte centrale aperta è di dimensioni pari a circa il 10 % della superficie totale. Nel vano centrale della vela c'è il corpo centrale collegato con l'estremità tramite tiranti. I tiranti fungono da sistema di ancoraggio della membrana e inoltre servono per stabilizzare l'estremità del foro e trasferire coppie di torsione dal corpo centrale alla vela.

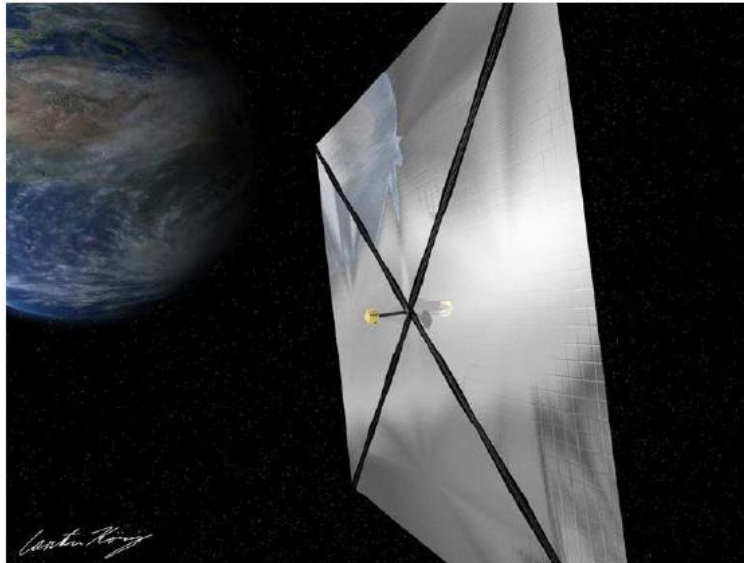
Il controllo di assetto viene realizzato grazie al disallineamento tra il centro di pressione e il centro di massa. La rotazione conferisce la stabilizzazione mentre le coppie date dal disallineamento portano alla precessione dell'asse di rotazione e quindi all'orientamento desiderato della vela.

Essendo la massa della vela concentrata al centro, la pressione sulla membrana conferisce alla vela una forma leggermente conica.

### **1.2.2 Vela Quadrata stabilizzata a tre assi**

È questa la configurazione che costituirà lo studio di questa Tesi. La vela quadrata (v. Figura 1.2) è formata da un corpo centrale in cui sono raccolti tutti i meccanismi per il dispiegamento della membrana e dei bracci, quelli per lo stoccaggio in fase di trasporto, la strumentazione e i sistemi di ancoraggio del carico pagante.

Dal corpo centrale partono quattro bracci. Essi possono essere di vario tipo,



**Figura 1.2:** Vela quadrata

ci sono i così detti bracci telescopici, il cui dispiegamento avviene grazie alla pressione di un gas contenuto al loro interno, o i bracci formati da longheroni tenuti insieme da tiranti e battenti. Come verrà spiegato in seguito, la presenza dell'uno o dell'altro tipo di albero determina una diversa distribuzione di tensioni sulla membrana.

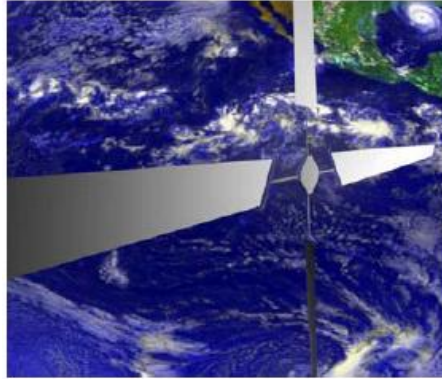
La superficie riflettente è formata da quattro triangoli di membrana unite in vario modo ai bracci.

La stabilizzazione è del tipo a tre assi e il controllo di assetto è ottenuto grazie a quattro superfici mobili poste ai quattro vertici che riescono a disallineare il centro di pressione e il centro di massa.

La semplicità di questo tipo di configurazione si presta bene allo studio parametrico che ci siamo proposti.

### 1.2.3 Heliogyro stabilizzata a spin

L'Heliogyro (v. Figura 1.3) è una vela formata da raggi riflettenti collegate ad un corpo centrale, la stabilità e la tensione nei raggi è garantita tramite la rotazione attorno all'asse del velivolo spaziale.



**Figura 1.3:** Heliogyro

Per vele di piccole dimensioni la rotazione permette di diminuire il peso della struttura, nelle vele grandi invece, la rigidità torsionale dei raggi deve comunque essere garantita grazie a strutture di supporto che vanno ad aumentare il peso della vela.

Anche questa configurazione è abbastanza semplice ed ha il notevole pregio di rendere agevole il dispiegamento dei raggi in orbita.

### 1.2.4 Solar Photon Thrustor

In questa configurazione, a differenza che nelle altre, la funzione di raccogliere la radiazione elettromagnetica è separata da quella di rifletterle.

La funzione di raccolta è eseguita da un grande paraboloide, chiamato collettore, che è rivolto costantemente verso la fonte di radiazione così da avere la massima esposizione ai raggi. I raggi riflessi dal collettore vengono poi raccolti dal riflettore e indirizzati verso un ultimo specchio orientabile che

serve a dirigere la spinta.

L'ultimo specchio ha dimensioni minori rispetto agli altri, solitamente dell'ordine di un centesimo.

Se da una parte questo tipo di soluzione ha il vantaggio di poter raccogliere costantemente il flusso energetico e di ottenere una buona manovrabilità, ha però dall'altra un notevole aumento nella complessità strutturale e peso.

### 1.3 Missioni con vele solari

Come è stato detto, le vele solari offrono il vantaggio di non dover trasportare il carburante a bordo.

Le applicazioni che possono essere pensate per una vela solare sono molteplici. Una molto interessante è quella di sfruttare le così dette orbite non kepleriane. Infatti, mentre in una qualsiasi orbita kepleriana il corpo attrattore deve occupare uno dei fuochi, le vele solari permettono una soluzione data da orbite il cui piano non contiene il Sole.

Un altro esempio di missioni per vele solari sono quelle che richiedono consumi notevoli per altre soluzioni convenzionali come, per esempio, missioni verso Mercurio.

Infine, si pensi al fatto che le vele solari si prestano bene a quel tipo di missione denominato *sample return*, quelle missioni cioè in cui è richiesto il ritorno del veicolo a terra.

La spinta ottenibile dalla radiazione elettromagnetica dipende dalla distanza dal Sole, ma è comunque non elevata, ecco perchè uno dei parametri fondamentali per un velivolo di questo tipo è mantenere il più possibile basso il peso complessivo del veicolo spaziale. Da questo si capisce come lo sviluppo delle vele solari sia strettamente legato allo studio di materiali sempre più testati e leggeri.

Volendo fare una veloce introduzione storica sull'utilizzo delle vele solari possiamo dire che tutto ha inizio con la dimostrazione dell'esistenza delle radi-

azioni elettromagnetiche da parte di *James Clerk Maxwell*(1860). Bisogna però aspettare gli anni '20 per le prime ipotesi di usare le radiazioni elettromagnetiche come sistema propulsivo per veicoli spaziali, tali ipotesi furono fatte da *Kostantin Tsiolkovky* e *Fridrickh Arturovich Tsander*.

Negli anni '50 fu ripreso lo studio delle vele solari, poi negli anni '70 *Jerome L. Wright* studiò una traiettoria per un rendezvous con la cometa di Halley che permetteva di raggiungere il corpo in quattro anni, tre anni prima di quanto avrebbe impiegato un velivolo con propulsore elettrico. A causa di problemi connessi con l'apertura della vela il progetto fu però abbandonato. Un nuovo interesse per l'utilizzo della propulsione solare si ha in concomitanza con l'anniversario della scoperta dell'America, in onore del quale fu organizzata una competizione per la progettazione di una missione di volo diretto su Marte utilizzando appunto una vela solare, ma nessuno dei progetti fu in seguito realizzato.

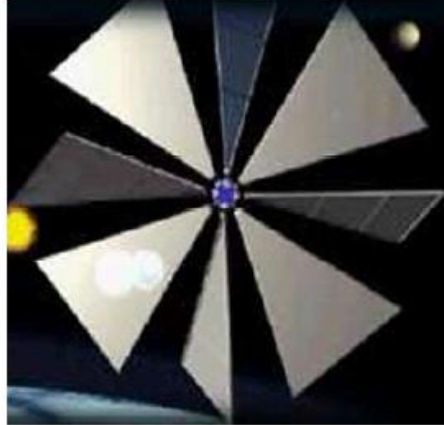
La prima simulazione di dispiegamento di una vela nello spazio si è avuta nel 1993 con lo *Znamya-2* costruita in Russia. Per ottenere tale dispiegamento si è usata la forza centrifuga ed una configurazione a disco.

Lo *Znamya-2* come i successivi *Znamya-2,5*(1999) e *Znamya-3*(2001) sono serviti per ricavare i dati relativi al comportamento termo-ottico e di verificare la stabilità della struttura e il suo funzionamento. Oltre a questo tali missioni servirono anche ad eseguire con successo un esperimento, chiamato *New Light*, per illuminare parte della Terra durante la notte.

Più recentemente sono state studiate vele quadrate come nei progetti della DLR/ESA che hanno cercato, con successo, di dimostrare la fattibilità realizzativa di vele quadrate molto semplici formate da quattro bracci di tipo CFRP (*Carbon Fibre Reinforced Plastics*), quattro film triangolari e un corpo centrale per il dispiegamento.

Anche la NASA con il programma ISP (*In-Space Propulsion*) si è interessata allo studio e la dimostrazione di vele quadrate meccanicamente sempre più elaborate, tra il 2003 e il 2004 sono state progettate, prodotte e testate con successo vele con un lato di 10 metri.

Si è in seguito progettata una vela di 20 metri di lato e questa è stata provata con successo, nel vuoto, nel maggio del 2005. Il primo veicolo spaziale



**Figura 1.4:** Cosmos-1

completamente propulso a vela solare ad essere stato lanciato nello spazio è stato il *Cosmos-1* nel giugno del 2005 (v. figura 1.4). Purtroppo la missione è fallita a causa del malfunzionamento del razzo vettore.

## 1.4 La fisica della propulsione con vele solari

Di seguito viene fatto un veloce riassunto che serve per la descrizione della propulsione solare e delle principali formule ad essa legate.

### 1.4.1 La pressione di radiazione solare

La forza propulsiva delle vele solari è la pressione di radiazione solare. La fisica di questo fenomeno può essere descritta indipendentemente considerando le due diverse interpretazioni della natura della luce: quella quantistica e quella elettromagnetica. In entrambi i casi si arriva al risultato che la pressione solare è uguale al rapporto tra il flusso di energia e la velocità della luce. Nella prima interpretazione la pressione è vista come la quantità di

moto trasportata dai fotoni per unità di area, mentre nella seconda è vista come densità dell'energia elettromagnetica. Possiamo allora dire che se  $P$  è la pressione della radiazione solare si ha:

$$P = \frac{W}{c}$$

dove  $W$  è il flusso di energia per unità di area nell'unità di tempo e  $c$  è velocità della luce. Il flusso  $W$  è esprimibile tramite la relazione :

$$W = \frac{W_{\oplus} \cdot r_{\oplus}^2}{r_1^2}$$

dove la costante  $W_{\oplus}$  è uguale a 1368 Watt/m<sup>2</sup> rappresenta il flusso di energia che arriva sulla Terra,  $r_{\oplus}$  è la distanza Terra-Sole e  $r_1$  è la distanza della vela dal Sole. La pressione  $P$  può essere a sua volta espressa in funzione della pressione di radiazione solare a distanza 1 AU, della distanza Terra-Sole  $r_{\oplus}$  e della distanza  $r_1$  dal Sole:

$$P = \frac{P_{\oplus} \cdot r_{\oplus}^2}{r_1^2}$$

### 1.4.2 La forza legata alla pressione di radiazione solare

Considerando l'interpretazione quantistica della luce possiamo vedere come la forza è legata al comportamento dei fotoni quando raggiungono la superficie. Si possono distinguere tre contributi alla forza totale legati al comportamento dei fotoni.

Il primo è dovuto ai fotoni che vengono riflessi specularmente, tali fotoni si portano dietro la loro quantità di moto  $mv_f$  e quindi dopo la riflessione la variazione della loro quantità di moto sarà  $2mv_f$ .

La forza in questo caso sarà:

$$F_n = 2 \cdot \rho_s \cdot P \cdot A \cdot \cos^2 \theta \cdot n$$

dove  $P$  è la pressione solare,  $A$  è l'area esposta alla luce solare,  $\rho_s$  è la percentuale dei fotoni che vengono riflessi,  $\theta$  è la declinazione del Sole,  $n$  è il versore normale alla superficie.

Il secondo è dato dalla percentuale  $\rho_a$  dei fotoni che vengono assorbiti. In questo caso la variazione della quantità di moto è  $mv_f$  e la forza è data da:

$$F_s = \rho_a \cdot P \cdot A \cdot \cos \theta \cdot s$$

in questo caso  $s$  è il versore della direzione dei raggi del Sole.

Il terzo contributo è quello dei fotoni diffusi. Tali fotoni dati da una percentuale  $\rho_d$ , danno luogo a due componenti di forza, una normale:

$$F_{d_n} = \frac{2}{3} \cdot \rho_d \cdot P \cdot A \cdot \cos^2 \theta \cdot n$$

e una componente nella direzione dei raggi solari:

$$F_{d_s} = \rho_d \cdot P \cdot A \cdot \cos \theta \cdot s$$

Chiaramente

$$\rho_s + \rho_a + \rho_d = 1$$

Nel caso analizzato in questo Lavoro si considererà la vela come un corpo rigido perfettamente riflettente avendo così  $\rho_s=1$  e quindi la forza totale in direzione normale alla superficie della vela sarà:

$$F = 2 \cdot \rho_s \cdot P \cdot A \cdot \cos^2 \theta \cdot n$$

## Capitolo 2

# IL PROBLEMA DELLA PARAMETRIZZAZIONE

*In questo capitolo viene descritto il problema della parametrizzazione e scalatura di una vela solare, mettendo l'accento sulla loro importanza per le scelte preliminari nel calcolo di massima per una missione spaziale.*

### 2.1 L'accelerazione caratteristica

Volendo confrontare più vele solari il parametro fondamentale utilizzato è la così detta *accelerazione caratteristica*, definita come l'accelerazione a cui la vela è sottoposta se orientata perpendicolarmente ai raggi solari e ad una distanza di 1 AU dal Sole.

La formula dell'accelerazione caratteristica è:

$$a_c = \frac{2 \cdot \eta \cdot P}{\sigma_{tot}} \quad (2.1)$$

dove  $\sigma_{tot}$  è la massa della vela solare per unità di area:

$$\sigma_{tot} = \frac{m}{A}$$

mentre  $P$  è la pressione solare, il termine due tiene di conto del fatto che i fotoni che colpiscono la vela vengono riflessi. Il termine  $\eta$  è l'efficienza della vela che tiene conto delle non perfette proprietà ottiche della membrana riflettente quali la non perfetta planarità del film di membrana, la percentuale di fotoni assorbiti, le ombre create dalle strutture di supporto, etc..

Dalla formula dell'accelerazione caratteristica (2.1) si può notare che un parametro molto importante è la  $\sigma_{tot}$ . Essa sarà al centro di tutto lo studio di questa Tesi.

Infatti possiamo immaginare che in un progetto di massima, ammettendo un'efficienza fissata per la nostra vela ed anche di aver fissato l'accelerazione richiesta per poter portare a termine la nostra missione, il termine da studiare resta appunto  $\sigma_{tot}$ .

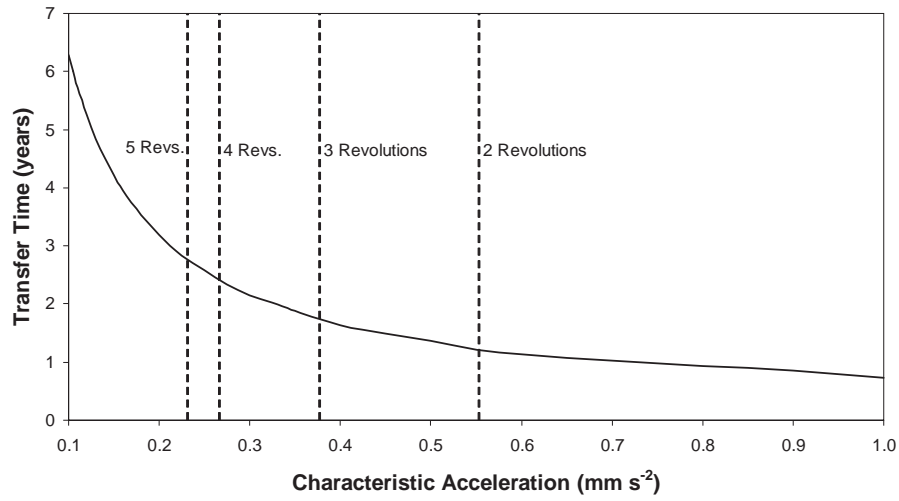
## 2.2 L'importanza della parametrizzazione

Dovendo iniziare la progettazione di una vela solare, quello che conosciamo è la missione che deve assolvere (cioè dove vogliamo arrivare e con che carico pagante) e, al più, il tipo di vela che vogliamo usare.

È chiara la difficoltà che incontriamo non avendo altre informazioni. In letteratura esistono esempi di grafici come quello di Figura 2.1 dove possiamo vedere il tipo di missione dato, in questo caso un trasferimento Terra-Mercurio, il legame tra il tempo di volo e l'accelerazione caratteristica che dobbiamo ottenere per la nostra vela.

Se fossimo in grado di conoscere la  $\sigma_{tot}$  della vela, cioè quella comprendente anche un eventuale carico pagante, in funzione di un parametro geometrico della vela, che nel caso della vela quadrata potrebbe essere il lato della vela, avremmo un dato di partenza molto interessante per il proseguimento del progetto.

Il difficile sta nel legare in modo convincente tutte le componenti che collab-



**Figura 2.1:** Tempo di volo in funzione dell'accelerazione caratteristica in un collegamento Terra-Mercurio

orano alla definizione del peso della vela con lo stesso parametro geometrico. Un problema di questo tipo è già stato trattato dal programma AEC-ABLE Scalable Solar Sail Subsystem ( $S^4$ ) [1].

Lo studio fatto nel sistema  $S^4$  ci è servito prima di tutto perchè ha dimostrato che lo studio che stavamo intraprendendo era fattibile e poi, dato che nell'articolo veniva riportato un grafico della  $\sigma_{tot}$  totale in funzione del lato della vela, per tarare i parametri della funzione ottenuta, che, come si farà vedere in seguito, si avvicina molto al grafico dell'articolo.

## Parte II

### Descrizione del modello e della formula parametrica

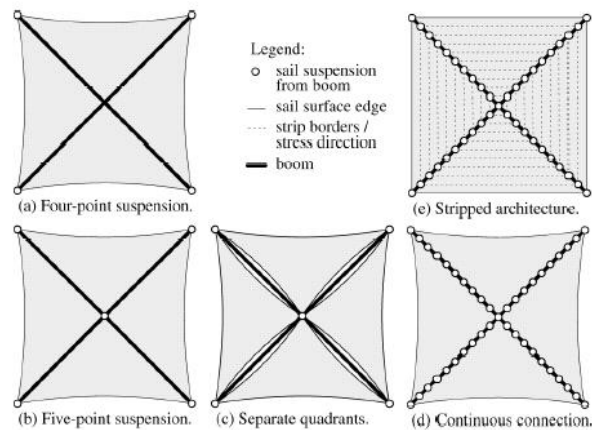
# Capitolo 3

## LA VELA QUADRATA

*Questo capitolo descrive più approfonditamente il tipo di vela scelto per il nostro studio. Viene fatta anche una descrizione delle parti principali come i bracci e la membrana. Tale descrizione è utile per chiarire le scelte successive.*

### 3.1 Il modello a cinque punti di contatto

Le configurazioni principali per una vela quadrata sono quelle descritte da Mikulas [2] e possiamo vederle riassunte in Figura 3.1. La descrizione sem-



**Figura 3.1:** Configurazioni per vela quadrata

plificativa che fa Mikulas si presta bene al nostro studio, infatti vengono considerati solo i bracci e la membrana.

Anche per quanto ci riguarda, le altre parti, quelle che compongono il corpo centrale, verranno prese in considerazione in un secondo tempo. Queste parti infatti non entrano in uno studio strutturale della vela, ma ne aumentano solo il peso.

Per il nostro studio avevamo la necessità di scegliere un modello, tra quelli proposti, che fosse abbastanza semplice dal punto di vista meccanico, ma soprattutto che rendesse facile, dal punto di vista analitico, il trasferimento degli sforzi tra membrana e albero.

È stato scelto quindi il modello a cinque punti di contatto, cioè il modello (c) della Figura 3.1.

In questo modello i bracci sono caricati in compressione dalle forze applicate all'estremità dalle corde che rendono tese le membrane.

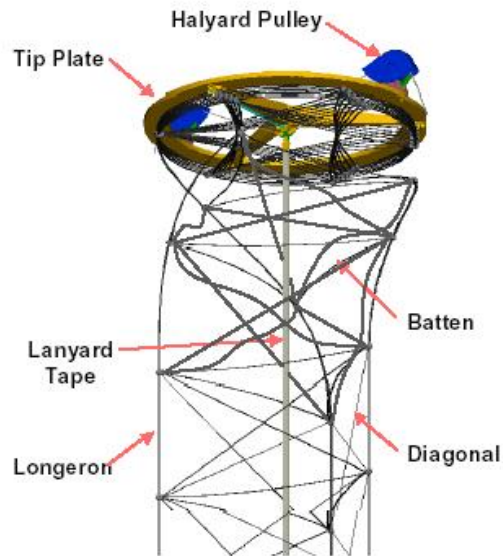
Le membrane sono prive di rinforzi agli angoli (*catenaries*). Questa scelta, come verrà spiegato meglio in seguito, è dettata dalla constatazione che la perdita di spinta dovuta alle grinze di estremità è trascurabile [3].

Questo modello ha come qualità principale quella di poter essere studiato per un largo intervallo di scalatura senza dover cambiare o complicare le strutture.

## 3.2 Bracci

Il tipo di braccio scelto per il nostro modello è quello tipo *COIL-ABLE*. Questo tipo di albero è descritto accuratamente nell'articolo della casa costruttrice, cioè la *AEC-ABLE* [4].

Tali bracci sono formati da tre longheroni privi di interruzioni (Continuous-Longeron Boom) e angolarmente equidistanziati. I longheroni vengono tenuti ad una certa distanza gli uni dagli altri grazie a aste trasversali, chiamate battenti e da tiranti, che uniscono, lungo la diagonale, i così detti nodi dell'al-



**Figura 3.2:** Parte terminale di un braccio tipo *COIL-ABLE*

bero, cioè i punti dove convergono longheroni, battenti e tiranti (ved. Figura 3.2).

Il materiale usato è lattice rinforzato con fibre di carbonio, tale materiale è molto adatto al loro sistema di dispiegamento. Essi infatti vengono dispiegati direttamente in orbita sfruttando l'energia elastica accumulata durante il loro stoccaggio. Altra buona qualità di questo tipo di bracci è che possono essere impacchettati in un volume ridotto, infatti quando sono raccolti in cilindri, posti simmetricamente al corpo centrale della vela, essi occupano solo il 9 % del volume occupato quando sono dispiegati.

Nella Figura 3.2 si vedono le varie parti che compongono un braccio, viene mostrata la parte terminale. Si notino anche le pulegge per le corde che serviranno a tendere le membrane (*halyard pulley*).

La progettazione di questi alberi è fatta seguendo il postulato di Gerard, delle strutture di minimo peso, vengono cioè dimensionate in modo che sia contemporanea l'insorgenza dell'instabilità a cui tali strutture potrebbero essere esposte. Nel nostro caso le due instabilità sono quella detta *globale* cioè

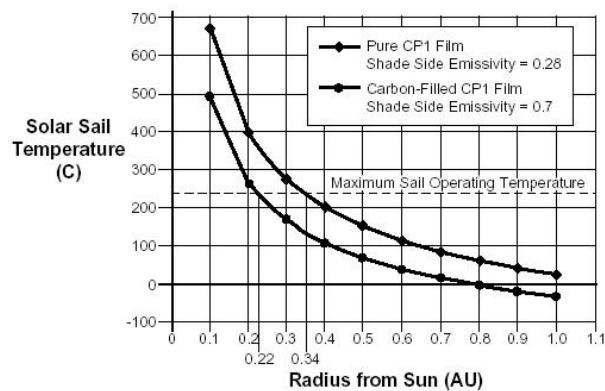
quella Euleriana considerando l'intero albero e quella detta *locale* per la quale i longheroni si instabilizzano tra un nodo e il successivo.

L'instabilità degli alberi sarà un punto focale del nostro studio e verrà esaurientemente trattato nel capitolo successivo.

### 3.3 Membrana

La membrana riflettente è formata da quattro triangoli uniti a formare un quadrato. Il materiale usato è il *CP1-Carbon filled*, un polimero inventato da NASA e commercializzato da SRS.

Il rivestimento riflettente è di alluminio, la parte posteriore è invece nera. La scelta di questo tipo di materiale ci dice quale sarà la temperatura massima a cui può essere sottoposta la vela e, di conseguenza, la minima distanza dal Sole a cui potrà volare. Come si può vedere dalla Figura 3.3 tratta da [5],



**Figura 3.3:** Minima distanza dal Sole che la membrana riesce a sopportare

tale distanza sarà approssimativamente 0,22 AU.

Come è già stato detto la membrana è considerata priva di rinforzi agli angoli, la perdita di efficienza data dalle grinze strutturali verrà minimizzata grazie ad una tensione uniforme e di adeguata intensità, all'interno dei triangoli di

membrana, mantenuta dalle corde che fissano la membrana stessa agli alberi.

# Capitolo 4

## LA FORMULA PARAMETRICA

*In questo capitolo vengono descritte le scelte fatte e data una giustificazione a queste scelte, che hanno portato alla definizione della formula parametrica che lega il peso della vela e la lunghezza del suo lato.*

### 4.1 Suddivisione della densità $\sigma_{tot}$

Come prima cosa possiamo suddividere la  $\sigma_{tot}$  in una  $\sigma_s$  e una  $\sigma_p$ , dove con  $\sigma_s$  si intende la massa strutturale della vela diviso l'area della membrana, con  $\sigma_p$  si definisce invece la massa del carico pagante diviso l'area.

Possiamo cioè scrivere:

$$\sigma_{tot} = \sigma_s + \sigma_p$$

Per quanto riguarda la  $\sigma_p$  non ci sono molte cose da aggiungere: quando avremo trovato la formula parametrica si farà vedere come questa varia con l'aggiunta del carico pagante.

La  $\sigma_s$  può invece essere suddivisa in diversi fattori:

- $\sigma_m$  massa della membrana per unità di area riflettente della vela

- $\sigma_b$  massa dei bracci per unità di area riflettente della vela
- $\sigma_{stow}$  massa dei sistemi di stoccaggio della membrana e dei bracci per unità di area riflettente della vela
- $\sigma_{m.c.}$  massa dei meccanismi centrali della vela per unità di area riflettente della vela
- $\sigma_{cont.b.}$  massa del meccanismo per il controllo dei bracci per unità di area riflettente della vela
- $\sigma_{strum.}$  massa strumentazione per unità di area riflettente della vela.

Si è considerato che le percentuali di massa delle parti escluse quelle dei bracci e della membrana, una volta scelte, restino costanti al variare della scala. Questa scelta è stata fatta, in primo luogo, per non complicare troppo il modello, in secondo luogo, perchè è alla base anche di altri modelli precedentemente sviluppati [1].

Le percentuali rispetto alla  $\sigma_s$ , che ci sono sembrate adeguate per i nostri interessi, sono:

- $\sigma_{stow} = 14,3 \%$
- $\sigma_{m.c.} = 6,3 \%$
- $\sigma_{cont.b.} = 5,9 \%$
- $\sigma_{strum.} = 0,5 \%$

Tali percentuali sono le stesse di [1], dove viene specificato che tali percentuali vengono tratte da un progetto concettuale di vela solare. A queste si è deciso di aggiungere un 5 % per un eventuale errore fatto sulle precedenti percentuali.

Otteniamo così una percentuale globale per tutte quelle parti che non siano bracci e membrana del 32 %.

Possiamo allora scrivere:

$$\sigma_s = \sigma_b + \sigma_m + 0,32 \cdot \sigma_s$$

Siamo in grado quindi di dire che, una volta calcolata la  $\sigma_b$  e la  $\sigma_m$ , è possibile ricavare la  $\sigma_s$  semplicemente da:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_b + \sigma_m}{0,68} \quad (4.1)$$

## 4.2 La densità della membrana $\sigma_m$

La scelta fatta è che questa densità non vari al variare della scala. In questo modo essa sarà dipendente solo dal materiale usato e dallo spessore della membrana, anch'esso non variabile con le scala.

Come abbiamo detto il materiale usato è il *CP1* con uno spessore di 5  $\mu\text{m}$ . Da queste scelte deriva una  $\sigma_m$  pari a 5  $\text{g}/\text{m}^2$ . Un altro articolo [6] che si occupa sempre di uno studio parametrico di vele solari ci dice che per moderne vele potremmo prendere un valore di 3  $\text{g}/\text{m}^2$ , ma questo valore ci è sembrato troppo ottimista.

Una delle ipotesi alla base dello studio è quella accennata nel Capitolo 3 e cioè che la membrana è considerata priva di rinforzi agli angoli. Immaginiamo però che si abbia all'interno dei triangoli di membrana una tensione pari a 1,5 psi (circa 10,7 KPa).

Tale valore è consigliato da [1] che, riferendosi anche a [3], ci dice che tale valore limita le grinze di estremità potendo, così, considerare costante il rendimento della vela nella formula dell'accelerazione caratteristica (2.1).

### 4.3 La densità dei bracci $\sigma_b$

Per il calcolo della massa degli alberi dobbiamo determinare le forze a cui sono sottoposti. La condizione peggiore è quella dell'instabilità di Eulero. Consideriamo cioè i nostri alberi come aste caricate in punta. In pratica si è considerato per il calcolo dell'instabilità solo i longheroni trascurando il contributo di battenti e tiranti, ci uniformiamo con questa scelta alla letteratura in proposito [1],[4]. I longheroni vengono considerati pieni.

#### 4.3.1 La forza di drizza

La forza che comprime gli alberi è la così detta *forza di drizza*, cioè la forza che la corda, che tende i triangoli di membrana, scarica al bordo dell'albero.

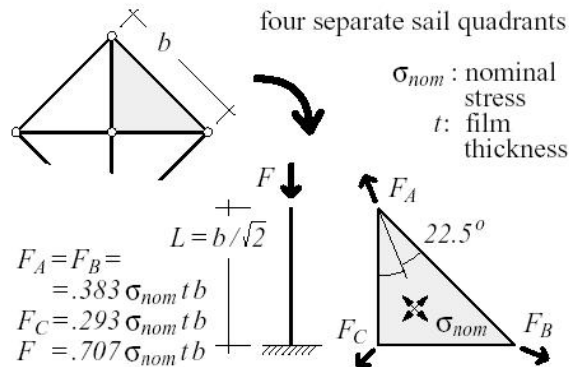


Figura 4.1: Forza di drizza

Il problema si sposta quindi nel valutare le forze ai vertici dei triangoli di membrana date dalle tensioni interne. Per quanto riguarda le tensioni interne ai triangoli viene considerata solo la tensione pari a 1,5 psi, cioè quella per limitare le grinze di estremità, dato che la tensione dovuta alla pressione solare darebbe una forza sull'albero 2000 volte più piccola [1].

Conosciuta la tensione al centro dei quadranti posso ricavare la forza di drizza

grazie alla formula data in [7], tale articolo tratta, tra gli altri, proprio il caso di quattro triangoli di vela separati (nostro modello a 5 punti di contatto). La formula data in [7] è:

$$F_H = 2 \cdot \beta_1 \cos \alpha \cdot \sigma_{nom} \cdot t \cdot l = \beta \cdot \sigma_{nom} \cdot t \cdot l \quad (4.2)$$

dove  $\beta_1$  è un coefficiente pari a 0,383,  $\alpha$  è l'angolo tra la direzione della corda e l'asse longitudinale dell'albero (nel nostro caso abbiamo preso  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ , essendo questo l'angolo più comune che possiamo ritrovare nelle vele quadrate a tutt'oggi studiate)  $\sigma_{nom}$  è la tensione interna al quadrante,  $t$  lo spessore della membrana e  $l$  il lato della vela. Da quanto detto  $\beta$  risulta pari a 0,707. Per ulteriori chiarimenti si veda la Figura 4.1 tratta da [7].

### 4.3.2 Instabilità globale

La nostra formula parametrica nasce principalmente dalla scelta del modello di instabilità globale. Tale modello è quello della trave vincolata a due estremi. Quindi possiamo dire che se chiamiamo  $P_{cr}$  il carico critico per un albero della vela, abbiamo:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_1^2} \cdot c_1 \quad (4.3)$$

Dove con  $E$  si è definito il modulo di elasticità dei longheroni che secondo il sito della casa costruttrice [4] è di a 7500 Kpsi. Con  $I$  si è chiamato il momento d'inerzia dell'albero. Tale momento sarà calcolato considerando i tre longheroni pieni, di raggio  $r$ , distanti  $R$  dall'asse del braccio e angolarmente equidistanziati. Da ciò deriva:

$$I = \left[ 3 \cdot \int_0^r r^3 \cdot dr \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cdot d\alpha + R^2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi}{6} \right) \right] \cdot \frac{\bar{\rho} \cdot L \cdot 4}{M_B}$$

e quindi:

$$I = 3 \cdot \left[ \frac{2 \cdot r^4 \cdot \pi}{4} + \frac{\pi \cdot R^2 \cdot r^2}{2} \right] \cdot \frac{\bar{\rho} \cdot L \cdot 4}{M_B} \quad (4.4)$$

In questa formula  $\bar{\rho}$  è la densità lineare dei longheroni,  $M_B$  è la massa totale dei quattro alberi e  $L$  è la lunghezza di ogni albero.

Per quanto riguarda la densità lineare possiamo dire che, definita con  $\rho_0$  la densità volumetrica del materiale con il quale sono costruiti i longheroni (lattice rinforzato) abbiamo:

$$\bar{\rho} = 9 \cdot \pi \cdot \rho_0 \cdot r^2 \quad (4.5)$$

Il legame tra il raggio dei longheroni e il raggio dell'albero ci viene dato da [4] ed è:

$$r = e_0 \cdot R \quad (4.6)$$

dove  $e_0$  è la massima deformazione che il braccio raggiunge quando è avvolto, facendo un paragone con una molla compressa possiamo dire che:

$$e_0 = \frac{F_{av}}{3 \cdot E \cdot \pi \cdot r^2}$$

con  $F_{av}$  la forza di avvolgimento. Sempre nel sito della casa costruttrice [4] ci viene detto che un valore ragionevole per  $e_0$  è uguale a 0,015.

Da quanto detto sul legame tra il raggio dei longheroni e il raggio dell'albero possiamo trascurare nella formula del momento d'inerzia (4.4) il termine dipendente da  $r^4$  ottenendo così:

$$I = 3 \cdot \frac{\pi \cdot R^2 \cdot r^2}{2} \cdot \frac{\bar{\rho} \cdot L \cdot 4}{M_B} \quad (4.7)$$

Tornando invece alla (4.3) con il termine  $c_1$  è stato definito il coefficiente di vincolo. I vincoli per il nostro modello sono dati, da un lato dal corpo centrale, e dall'altro dalla corda che tende la membrana.

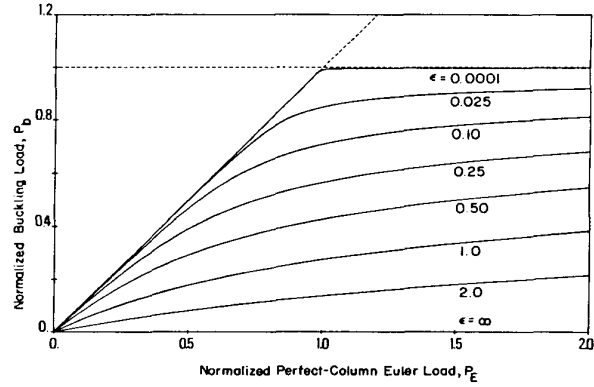
Mentre per quanto riguarda il primo vincolo è chiaro si possa parlare di vincolo elastico, nel secondo lo possiamo fare se immaginiamo che tale corda oltre che dare il carico di punta, ci dà anche un carico di richiamo elastico in direzione trasversale. Detto questo, nella difficoltà di calcolare un coefficiente elastico preciso, ci è sembrato plausibile uniformarci agli altri studi [1], [6] che ci danno il valore 1 per tale coefficiente. Definito il coefficiente di vincolo, possiamo dire che  $L_1$ , cioè la lunghezza libera di inflessione, sarà uguale alla lunghezza dell'albero  $L$ .

### 4.3.3 Termini correttivi per l'instabilità globale

Come già detto, la forza che la membrana trasmette agli alberi non è perfettamente allineata con l'asse dell'albero. A questo va aggiunto che l'albero è incurvato. Tutto questo ci porta a definire un fattore di correzione che chiameremo  $f$ .

Per calcolare tale fattore ci vengono date delle formule trascendenti alle pagine 55-57 di [8], anche [1] studia questo fattore e ci dice che per un angolo della corda di  $\frac{\pi}{8}$ , come nel nostro caso,  $f$  può essere preso uguale a 0,48.

Un'altra correzione ci viene data dal fatto che i longheroni potrebbero avere delle imperfezioni iniziali, di questo problema si occupa [9]. Utilizzando la Figura 4.2 tratta da [9] con l'imposizione per il nostro caso che il rapporto tra l'instabilità globale e locale  $P_E$  sia uguale a 1 (come ho già detto i nostri alberi sono progettati per avere il minimo peso quindi le instabilità si eguagliano) e ammettendo un'imperfezione globale del 25 %, cioè un  $\varepsilon$  uguale a 0,25, otteniamo un fattore correttivo  $\tau$  uguale a 0,6. Non avendo informazioni accurate per valutare il valore dell'imperfezione iniziale degli alberi, è stato scelto un valore indicativo. Comunque, come si farà vedere



**Figura 4.2:** Fattore correttivo imperfezioni iniziali

in seguito, quando tratteremo il problema della sensibilità ai parametri, il variare del parametro  $\tau$  fa variare poco la funzione parametrica.

La terza correzione deriva dal fatto che abbiamo scelto un coefficiente di sicurezza  $S.F.$ , costante per tutte le scale, uguale a 3.

#### 4.3.4 Espressione iniziale della formula parametrica

Siamo ora in grado di ricavare una prima espressione della formula parametrica, sostituendo in (4.3) le (4.2),( 4.5),( 4.6),( 4.7), sapendo che:

$$l = \sqrt{2} \cdot L \quad (4.8)$$

e tenendo conto dei termini correttivi. Tale espressione sarà:

$$\sigma_B = K_I \cdot \left(\frac{R}{l}\right)^6 \cdot l^2 \quad (4.9)$$

con:

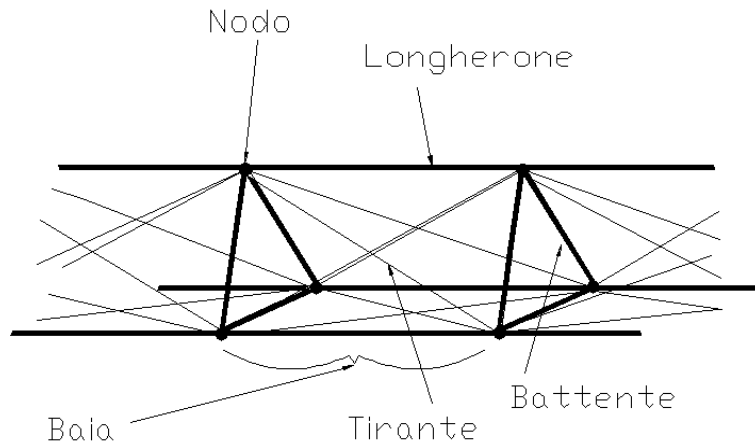
$$K_I = \frac{54 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi^4 \cdot \tau \cdot f \cdot e_0^4 \cdot E \cdot \rho_0}{(S.F.) \cdot t \cdot \sigma_{nom} \cdot \beta} \cdot c_1$$

A questo punto occorre calcolare il legame tra il raggio dell'albero e il lato della vela.

## 4.4 Il legame tra il raggio degli alberi e il lato vela

Dalla Formula (4.9) si vede che nel caso si conosca  $K_I$ , resta da determinare il legame tra il raggio degli alberi e il lato della vela, che resta il nostro parametro di scalatura.

Per ricavare questo legame si è imposta l'uguaglianza tra l'instabilità globale degli alberi, di cui abbiamo già parlato, e quella che definiamo come instabilità locale. L'instabilità locale è ancora una instabilità di tipo primario, cioè



**Figura 4.3:** Ingrandimento di una baia dell'albero

senza deformazione della sezione nel piano trasversale, ma che si manifesta nei longheroni all'interno delle baie cioè tra un nodo e l'altro (per ulteriori

chiarimenti si veda la Figura 4.3).

L'uguaglianza delle due instabilità è data dal voler rispettare il postulato di Gerard essendo gli alberi strutture di minimo peso.

Le due formule da uguagliare sono quella dell'instabilità globale:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_1^2} \cdot c_1 = \frac{3 \cdot \pi^3 \cdot E \cdot e_0^2 \cdot R^4}{2 \cdot L_1^2} \cdot c_1$$

dove abbiamo tenuto di conto anche di (4.6) e (4.7), e quella dell'instabilità locale, che si scrive:

$$\frac{P_{cr}}{3} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_b^2} \cdot c_2 = \frac{3 \cdot \pi^3 \cdot E \cdot e_0^4 \cdot R^4}{4 \cdot l_b^2} \cdot c_2 \quad (4.10)$$

il termine  $c_2$  è il coefficiente di instabilità locale, di questo coefficiente ci occuperemo nel paragrafo successivo, anche per questa formula vale la (4.6), ma per quanto riguarda il momento d'inerzia esso è dato da un solo longherone e quindi semplicemente:

$$I = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

Nella formula dell'instabilità locale (4.10) con il termine  $l_b$  si è indicata la lunghezza della baia. Tale lunghezza ci viene data dal sito della casa costruttrice [4]. Esso infatti ci dice che:

$$l_b = a \cdot R$$

dove  $R$  è ancora il raggio del braccio e  $a$  è un coefficiente che può andare da 1 a 1,25. Uguagliando le due instabilità e sostituendo il valore di  $l_b$  si ottiene:

$$R = \frac{\sqrt{c_2} \cdot e_0 \cdot L}{\sqrt{c_1} \cdot a}$$

A questa equazione abbiamo aggiunto un termine  $e_1$ , tale termine ci serve per non far andare a zero il valore di  $R$  quando  $L$  tende a zero, possiamo quindi definirlo come una sorta di raggio minimo. Otteniamo così:

$$R = \frac{\sqrt{c_2} \cdot e_0 \cdot L}{\sqrt{c_1} \cdot a} + e_1$$

Ricordando (4.8) si ottiene l'espressione finale del legame tra il raggio dei bracci e il lato della vela:

$$\frac{R}{l} = \frac{\sqrt{c_2} \cdot e_0}{\sqrt{c_1} \cdot a \cdot \sqrt{2}} + \frac{e_1}{l}$$

Questa equazione può anche essere scritta come:

$$\frac{R}{l} = \Sigma + \frac{e_1}{l} \tag{4.11}$$

dove:

$$\Sigma = \frac{\sqrt{c_2} \cdot e_0}{\sqrt{c_1} \cdot a \cdot \sqrt{2}} \tag{4.12}$$

A questo punto rimane da studiare più in dettaglio l'instabilità locale per calcolare il coefficiente  $c_2$ .

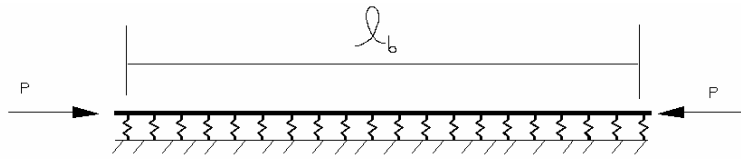
## 4.5 L'instabilità locale

Se prendiamo in considerazione una singola baia, essa sarà limitata ai due estremi da due vincoli elastici. Si sono considerati come vincoli elastici le reazioni date dai battenti e dai tiranti allo spostamento trasversale del nodo. Come sappiamo se ho un numero elevato di baie ( $> 3$ ) posso immaginare di

distribuire i vincoli di estremità di costante elastica  $K$  su tutta la lunghezza della baia ottenendo così una rigidezza per unità di lunghezza  $h$  definita da:

$$h = \frac{K}{l_b} \quad (4.13)$$

Il modello per l'instabilità locale diventa quindi quello descritto in figura 4.4. La trave rappresenta il longherone, abbiamo logicamente considerato



**Figura 4.4:** Modello per instabilità locale

una simmetria cilindrica, studiando così solo un longherone con i battenti e i tiranti che gli competono.

Possiamo allora scrivere l'equazione di equilibrio per la trave ottenendo:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} - P \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} + h \cdot v = 0$$

in questa equazione con  $v$  abbiamo indicato lo spostamento nella direzione trasversale della trave mentre con  $z$  si è indicato la direzione longitudinale.

Introducendo ora una variabile adimensionale  $\xi$  definita come:

$$\xi = \frac{z}{l_b}$$

si ottiene:

$$\frac{E \cdot I}{l_b^4} \cdot \frac{d^4 v}{d\xi^4} - \frac{P}{l_b^2} \cdot \frac{d^2 v}{d\xi^2} + h \cdot v = 0$$

ricordando ora l'espressione di  $h$  (Equazione (4.13)) si ottiene l'equazione

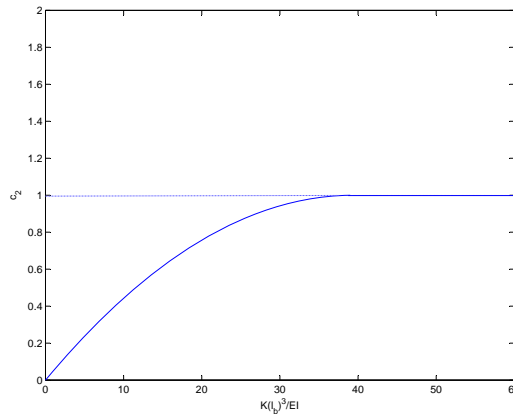
differenziale:

$$\frac{d^4 v}{d\xi^4} - \frac{P \cdot l_b^2}{E \cdot I} \cdot \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{K \cdot l_b^3}{E \cdot I} \cdot v = 0 \quad (4.14)$$

Come abbiamo già accennato nel paragrafo precedente la soluzione di questa equazione ci dà il carico critico di instabilità locale:

$$P_{cr}' = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_b^2} \cdot c_2$$

Come si può vedere in questo caso  $P_{cr}'$  è riferito ad un solo longherone e non a tutto il braccio come in (4.10).



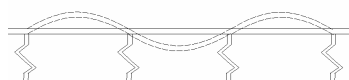
**Figura 4.5:** Coefficiente d'instabilità locale

Il coefficiente di vincolo  $c_2$  sarà funzione del parametro  $\frac{K \cdot l_b^3}{E \cdot I}$  e il suo andamento si può vedere in Figura 4.5.

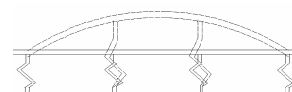
Dalla Figura 4.5 si può vedere che il coefficiente di vincolo è costantemente uguale a 1 se:

$$\frac{K \cdot l_b^3}{E \cdot I} \geq 4 \cdot \pi^2 \quad (4.15)$$

In pratica il comportamento può essere riassunto nelle Figure 4.6 e 4.7. Se nei nodi ho una rigidità tale per cui essi non si muovono verticalmente ho un comportamento detto *nodale* e in questo caso  $c_2 = 1$ , altrimenti ho il comportamento di Figura 4.7 e in questo caso  $c_2 < 1$ .



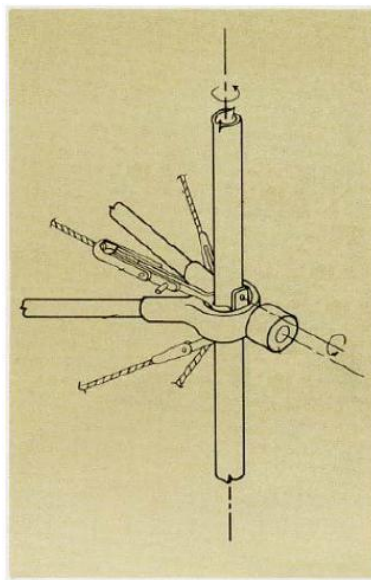
**Figura 4.6:** Comportamento nel caso  $c_2 = 1$



**Figura 4.7:** Comportamento nel caso  $c_2 < 1$

### 4.5.1 La rigidità dei vincoli ai nodi

Consideriamo che la rigidità nei nodi venga data dai battenti e i tiranti.



**Figura 4.8:** Particolare di un albero di tipo COIL-ABLE

Immaginando un comportamento elastico di questi corpi e con riferimento

alla Figura 4.8 tratta da [4], che ci fa vedere un ingrandimento di un nodo, possiamo dire che la costante elastica del vincolo equivalente che immaginiamo essere posto nel nodo sarà:

$$K = \frac{2 \cdot E_1 \cdot A_1}{L_1 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} + \frac{4 \cdot E_2 \cdot A_2}{L_2 \cdot \cos \theta \cdot \cos \frac{\pi}{6}} \quad (4.16)$$

dove  $E_1$  e  $E_2$  sono i moduli elastici rispettivamente dei battenti e dei tiranti,  $A_1$  e  $A_2$  le sezioni trasversali sempre dei battenti e tiranti, per quanto riguarda gli altri termini si veda la Figura 4.9.

Il primo termine a destra dell'uguale è riferito ai 2 battenti mentre il secondo ai 4 tiranti.

Il procedimento seguito per il calcolo della Formula (4.16) è stato inizialmente quello di riportare i tiranti sui battenti e in seguito di riportare sia gli uni che gli altri sul piano contenente sia il longherone che l'asse dell'albero. Dalla Figura 4.9 possiamo dire che:

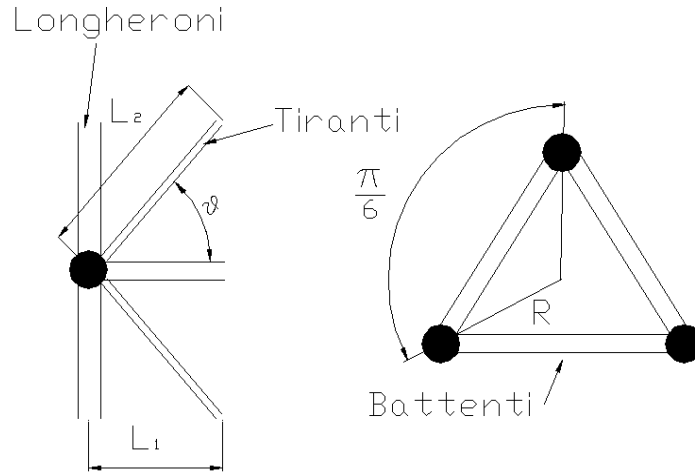
$$L_2 \cdot \cos \theta = L_1 = R \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

Otteniamo così:

$$K = \frac{2 \cdot E_1 \cdot A_1 + 4 \cdot E_2 \cdot A_2}{R \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6}}$$

Da [4] sappiamo che sia i battenti che i tiranti sono costruiti con lo stesso materiale dei longheroni, quindi abbiamo lo stesso modulo di elasticità.

Per quanto riguarda le sezioni possiamo prendere come esempio quanto ci dice [10]. In questo articolo ci viene dato un esempio di braccio con le dimensioni dei vari componenti, ammettendo che le proporzioni restino più o meno costanti al variare della scala possiamo dire che è plausibile trascurare il contributo dei tiranti essendo la loro sezione lo 0,34 % di quella dei battenti. L'area dei battenti è invece pari al 44 % di quella dei longheroni. Tenuto



**Figura 4.9:** Rappresentazione semplificativa di un nodo

di conto di tutte queste cose possiamo dire:

$$K = \frac{2 \cdot 0,44 \cdot E \cdot \pi \cdot e_0^2 \cdot R^2}{R \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{0,88 \cdot E \cdot \pi \cdot e_0^2 \cdot R}{\cos^2 \frac{\pi}{6}}$$

### 4.5.2 Il coefficiente per l'instabilità locale

Avendo calcolato la  $K$  possiamo, dopo averla sostituita nel parametro  $\frac{K \cdot l_b^3}{E \cdot I}$ , verificare la (4.15) in modo da ottenere  $c_2 = 1$ .

Sostituendo otteniamo:

$$\frac{K \cdot l_b^3}{E \cdot I} = \frac{8 \cdot 0,44 \cdot a^3}{e_0^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6}} \geq 4 \cdot \pi^2$$

Tale disequazione è verificata se:

$$a^3 \geq 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{e_0^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6}}{8 \cdot 0,44}$$

sostituendo il valore di  $e_0 = 0,015$  si ha che la disequazione è verificata se

$a \geq 0,12$  m. Essendo nel nostro caso  $a$  compresa tra 1 e 1,25 m, possiamo dire che i battenti sono abbastanza rigidi per avere il comportamento nodale (vedere Figura 4.6) e quindi è giusto assumere  $c_2 = 1$ .

## 4.6 Espressione finale della formula parametrica

Andando a sostituire nella (4.9) la (4.11) e sviluppando i conti otteniamo l'espressione finale della formula che lega la  $\sigma_b$  con il lato della vela (1):

$$\begin{aligned} \sigma_B = & K_I \cdot (\Sigma^6 \cdot l^2 + 6 \cdot \Sigma^5 \cdot l \cdot e_1 + 15 \cdot \Sigma^4 \cdot e_1^2) + \\ & + K_I \cdot \left( \frac{20 \cdot \Sigma^3 \cdot e_1^3}{l} + \frac{15 \cdot \Sigma^2 \cdot e_1^4}{l^2} + \frac{6 \cdot \Sigma \cdot e_1^5}{l^3} + \frac{e_1^6}{l^4} \right) \quad (4.17) \end{aligned}$$

con:

$$K_I = \frac{54 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi^4 \cdot \tau \cdot f \cdot e_0^4 \cdot E \cdot \rho_0}{(S.F.) \cdot t \cdot \sigma_{nom} \cdot \beta} \cdot c_1$$

e:

$$\Sigma = \frac{\sqrt{c_2} \cdot e_0}{\sqrt{c_1} \cdot a \cdot \sqrt{2}}$$

## Parte III

# Risultati ottenuti

# Capitolo 5

## CURVE DELLE DENSITÀ

*In questo capitolo verranno mostrati i grafici che si possono ottenere dall'uso della formula parametrica, verranno rappresentati il legame tra il raggio dell'albero e la lunghezza del lato della vela, la densità dei bracci, la densità strutturale e infine quella totale al variare del peso del carico pagante.*

### 5.1 La densità dei bracci $\sigma_b$

Grazie a dei programmi sviluppati in ambiente *MATLAB* si è potuto mostrare come la densità dei bracci vari con l'aumentare del lato della vela.

Si è scelto di far variare il lato da un minimo di 20 m ad un massimo di 300 m.

Prima di mostrare le curve è opportuno riassumere i valori scelti per i fattori che entrano nelle formule del Paragrafo 4.6, ciò viene fatto in Tabella (5.1). Come ho già detto, il valore di alcuni di questi fattori è stato scelto seguendo gli altri studi su questo argomento [1], [4], [7], [9]. Per quanto riguarda invece il termine  $e_1$  (il raggio minimo dell'albero) il suo valore è stato tarato in modo che il grafico della curva data da [1], che rappresentava la densità strutturale della vela, si avvicini alla curva ricavata grazie alla (4.1).

Come si può vedere nella Figura 5.4 le due curve si avvicinano molto soprattutto alle basse scale. In Figura 5.1 viene rappresentato il legame tra il

simbolo	valore	descrizione
$\sigma_{nom}$	1,5 psi	tensione all'interno dei quadranti di membrana
$\rho_0$	$2076 \cdot 10^{-3} \text{ g /m}^3$	peso specifico del materiale alberi
$\beta$	0,707	coefficiente per forza di drizza
$t$	$5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	spessore membrana
$E$	7500 Kpsi	modulo di elasticità degli alberi
$e_0$	0,015	legame tra il raggio dei longheroni e quello dell'albero
$S.F.$	3	fattore di sicurezza
$\tau$	0,6	fattore correttivo per difetti iniziali
$c_1$	1	coefficiente di vincolo per instabilità globale
$c_2$	1	coefficiente di vincolo per instabilità locale
$a$	1	rapporto tra lunghezza baia e raggio albero
$e_1$	0,386	termine noto nell'equazione che lega il raggio dell'albero e il lato della vela
$f$	0,48	fattore correttivo per l'instabilità globale

**Tabella 5.1:** Valore dei parametri utilizzati

raggio del longherone e il lato dell'albero.

In Figura 5.2 viene rappresentata in nero la curva della densità dei bracci (4.17), sotto la curva in nero si possono vedere altre curve. Tali curve rappresentano i contributi polinomiali che, sommati, ci danno la curva in nero.

In Figura 5.3 è rappresentata la sola densità dei bracci, come si vede tale curva ha un minimo in corrispondenza di un valore del lato di 100 m, questo minimo è dato dal fatto che alle alte scale iniziano a pesare quei termini che dipendono dal lato in modo più che lineare (si veda l'Equazione 4.17).

In realtà il comportamento alle alte scale è quello su cui abbiamo meno certezze dato che, come si legge in [4], a tutt'oggi non vengono costruiti alberi di lunghezza tale da coprire quelle scale.

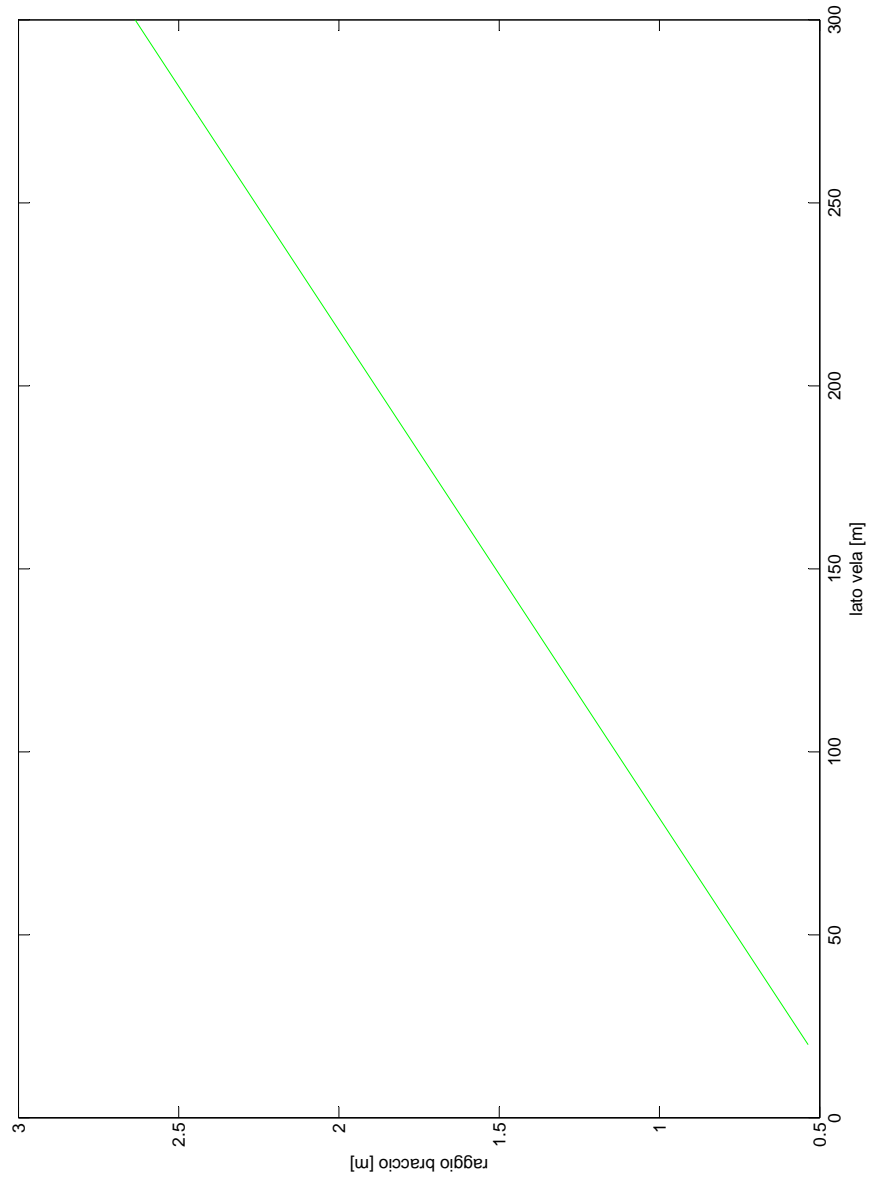
## 5.2 La densità strutturale $\sigma_s$

Aggiungendo alla densità degli alberi quella della membrana che, come si è detto, assumiamo uguale a  $5 \text{ g/m}^2$  e ricordando (4.1) si ottiene la densità strutturale rappresentata in Figura 5.4.

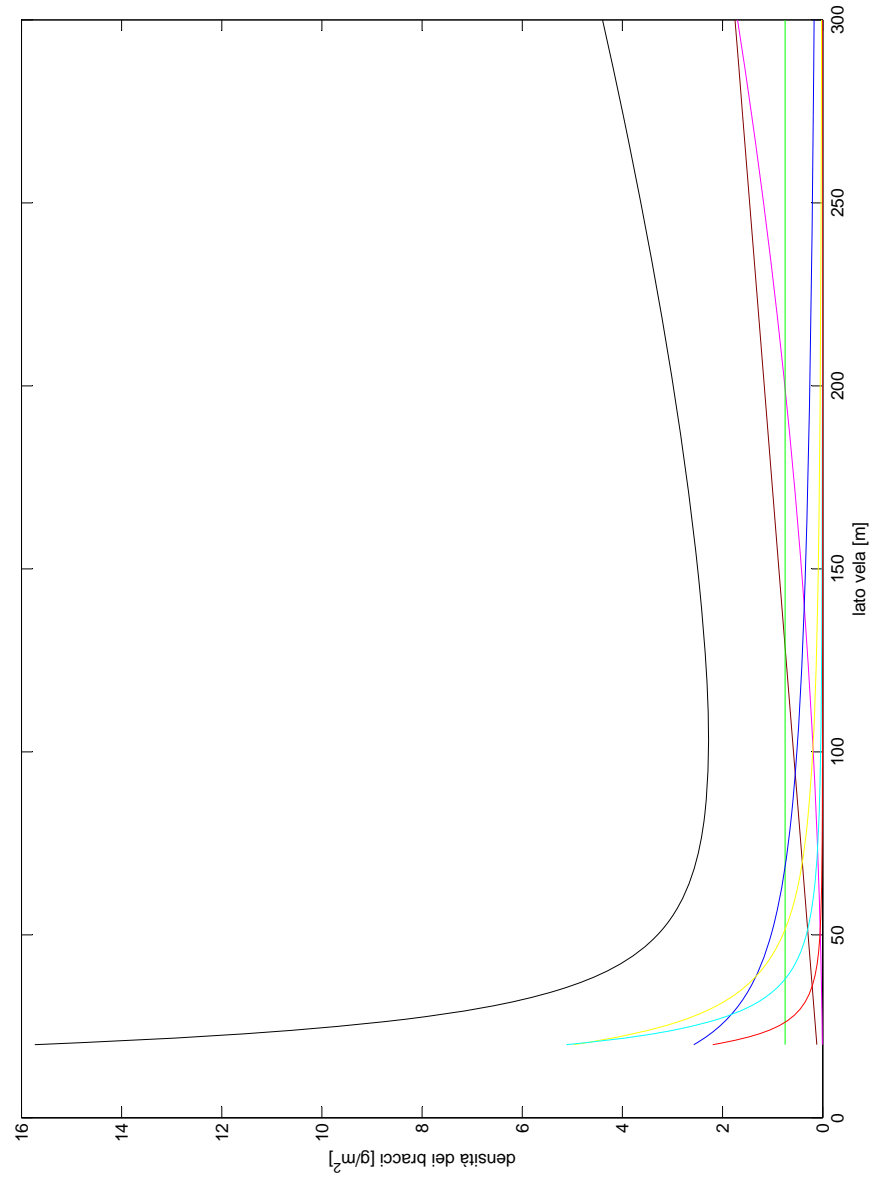
## 5.3 La densità totale $\sigma_{tot}$

Se facciamo variare la percentuale del peso del carico pagante dallo 0 % ad un massimo del 60 % si ottengono le curve rappresentate in Figura 5.5.

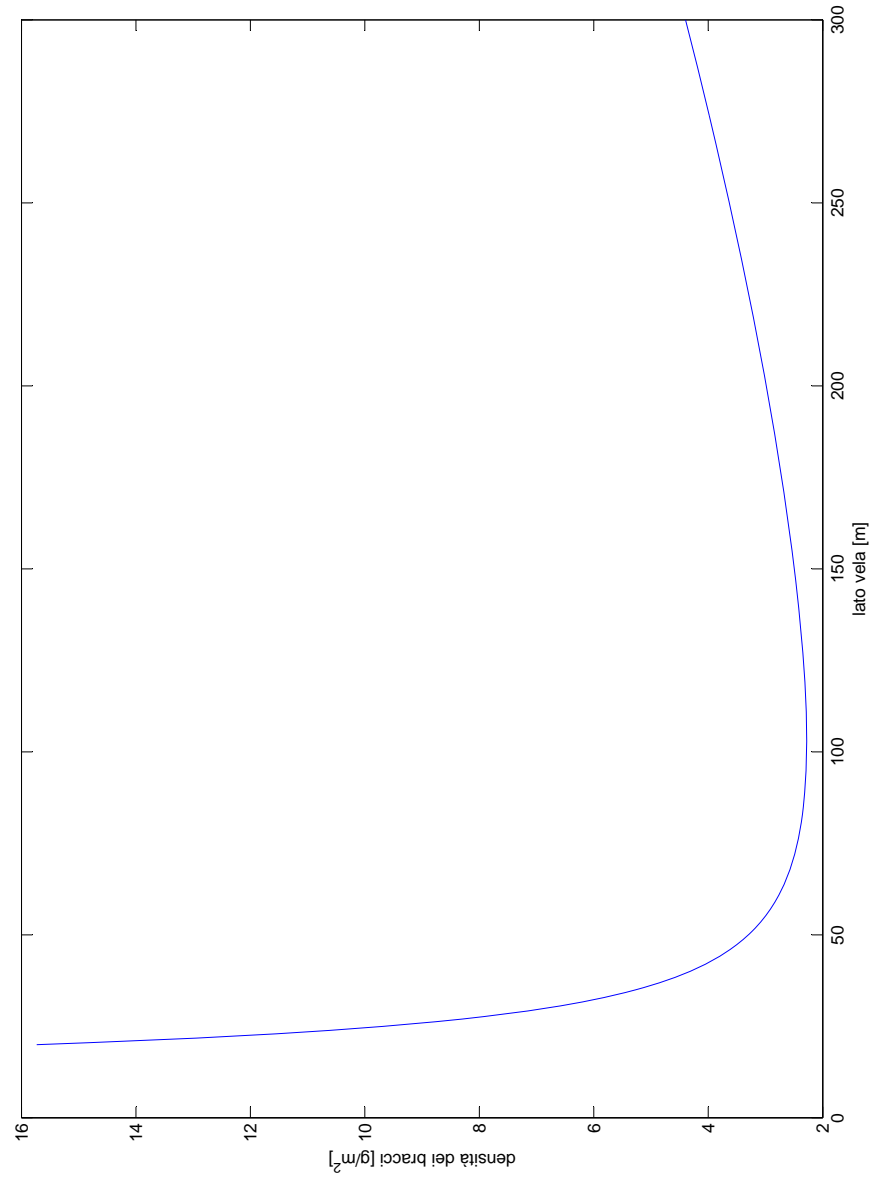
Possiamo anche immaginare di aggiungere, invece, direttamente del peso del carico pagante e dividendolo poi per l'area della vela ottenere una certa densità di carico pagante, il risultato è rappresentato in Figura 5.6.



**Figura 5.1:** Legame tra il raggio dell'albero e il lato della vela



**Figura 5.2:** La densità dei bracci  $\sigma_b$



**Figura 5.3:** La densità dei bracci  $\sigma_b$

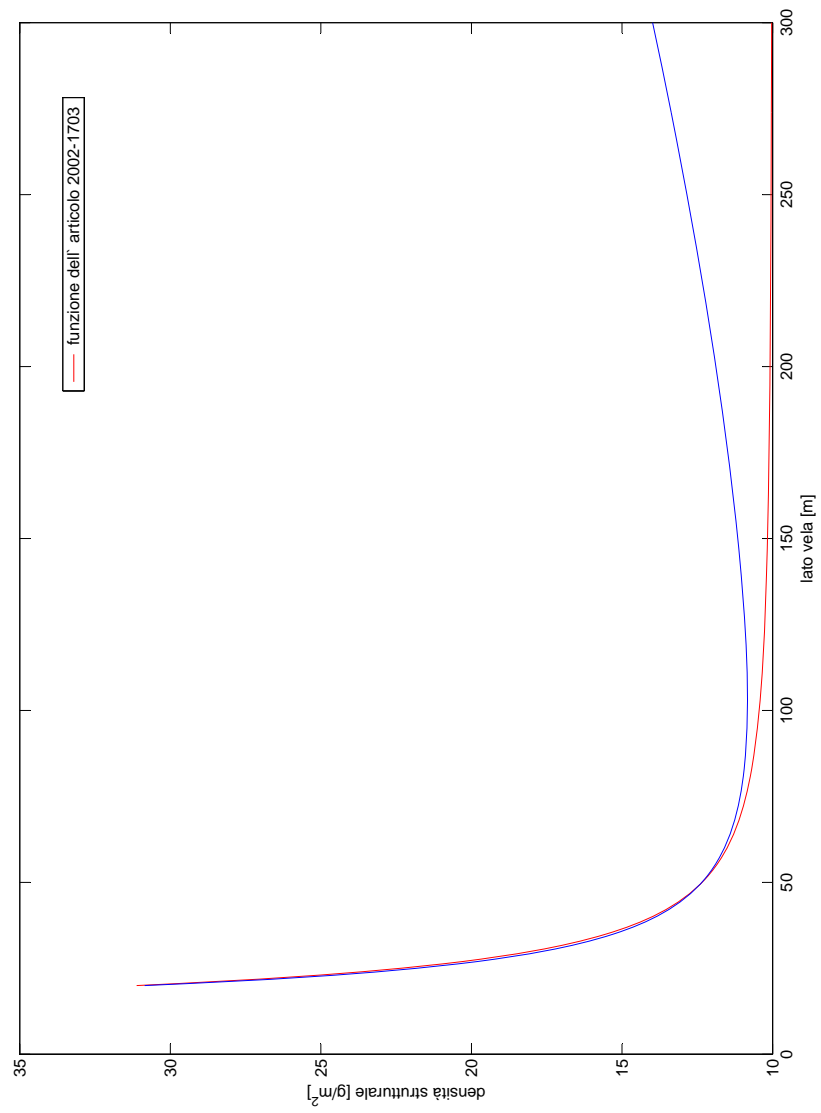


Figura 5.4: La densità strutturale  $\sigma_s$

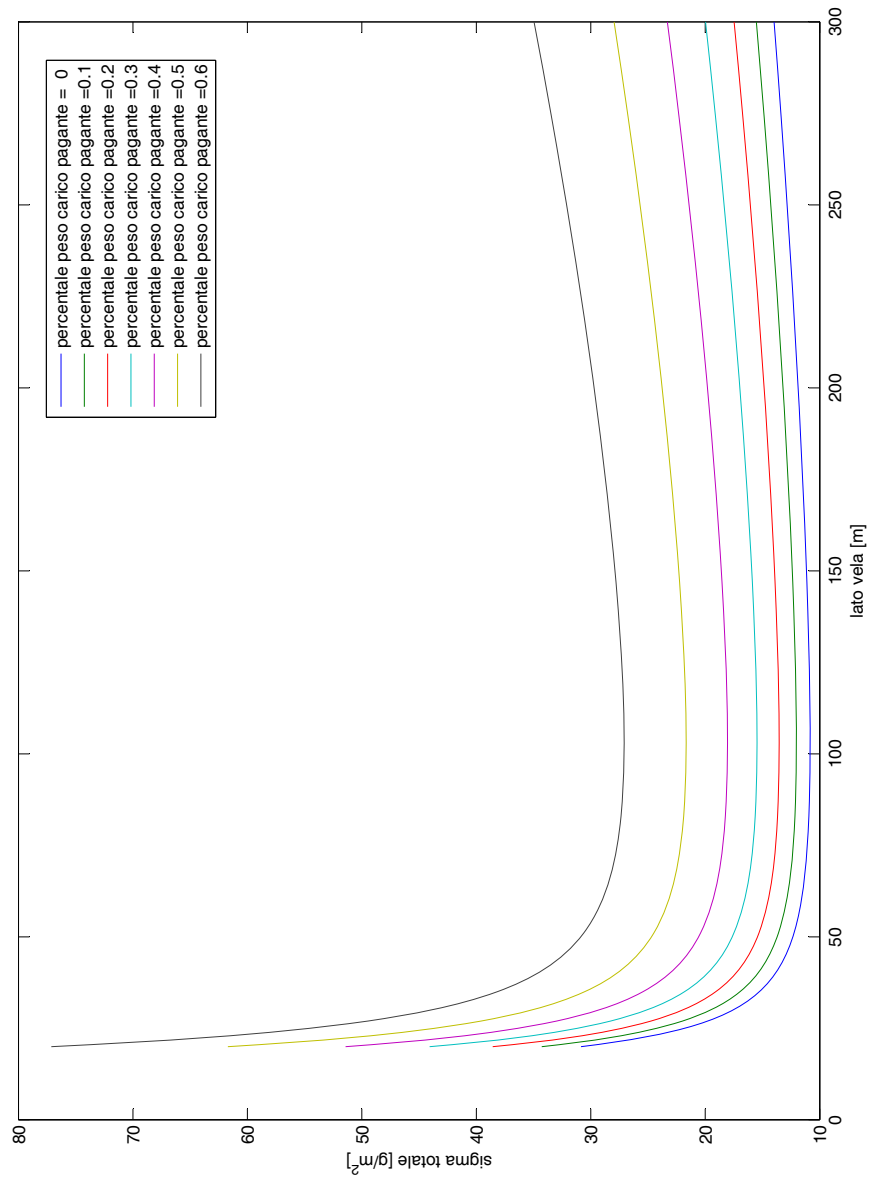


Figura 5.5: La densità totale  $\sigma_{tot}$

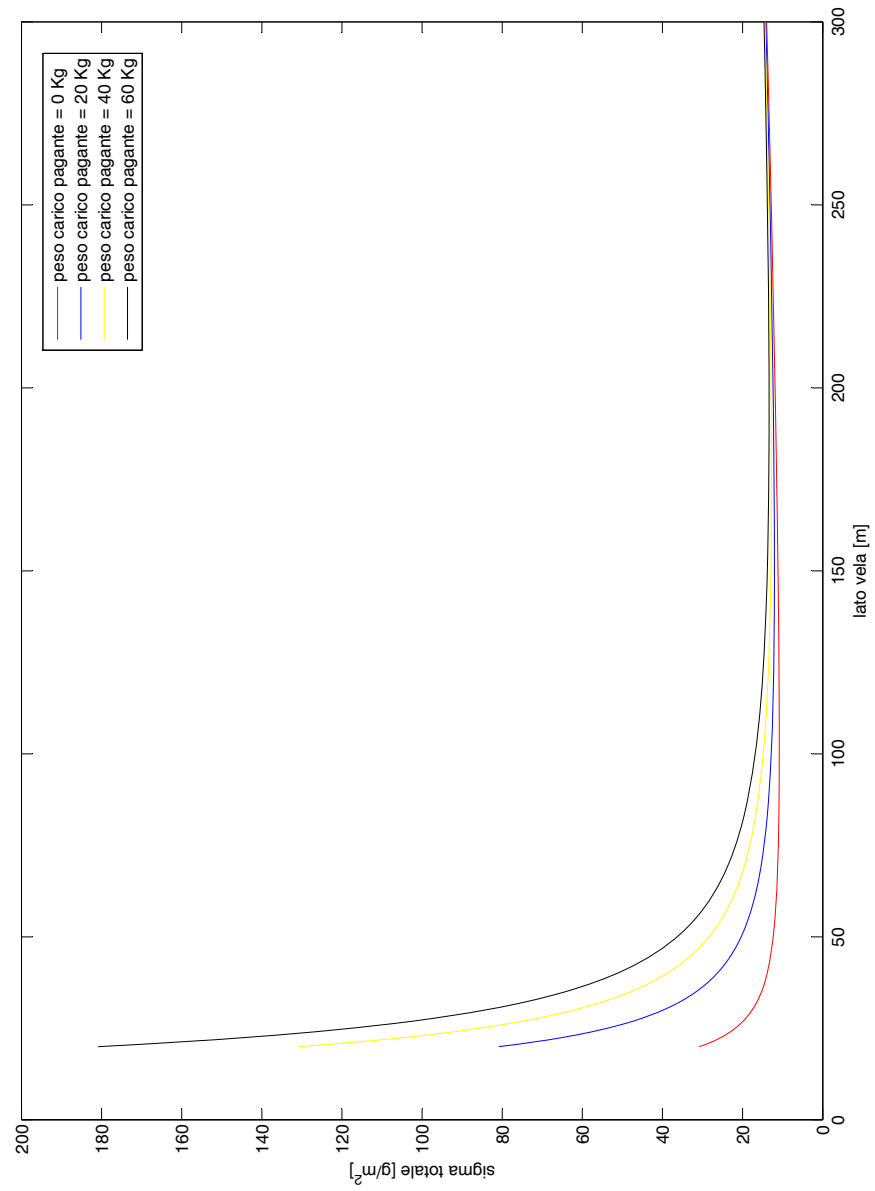


Figura 5.6: La densità totale  $\sigma_{tot}$

# Capitolo 6

## STUDIO DI SENSIBILITÀ

*In questo capitolo si mostrano quali sono i cambiamenti che si hanno nella formula che lega il raggio dei bracci e la lunghezza del lato della vela e in quella della densità dei bracci, al variare dei parametri più significativi.*

### 6.1 I parametri più importanti

Per dare una conclusione a questo studio parametrico si è deciso di vedere come alcuni dei parametri che entrano nella nostra formula la influenzino. In pratica si sono fatti variare questi parametri intorno al valore settato (vedere Tabella 5.1) e si è visto come questa variazione incida nelle due formule più significative di questo studio, la formula che lega il raggio dell'albero con il lato della vela (4.11) e quella che dà la densità degli alberi in funzione del lato della vela (4.17). I parametri scelti per questo studio sono stati:

- $e_0$  legame tra raggio braccio e raggio longherone
- $\tau$  fattore correttivo per imperfezioni iniziali
- $a$  legame tra lunghezza baia e raggio albero
- $e_1$  raggio minimo

### 6.1.1 Sensibilità a $e_0$

Come si può vedere dalle Figure 6.1 e 6.2 mentre la prima curva varia molto soprattutto alle alte scale l'altra ha anch'essa una grande variazione ma a tutte le scale. Si è fatto assumere al parametro  $e_0$  i valori : 0,0075; 0,012; 0,015; 0,018.

### 6.1.2 Sensibilità a $\tau$

Come è stato accennato nel Paragrafo 4.6 una eventuale variazione di questo parametro fa variare poco la (4.17) mentre lascia inalterata la (4.11), ciò è visibile in 6.4 e 6.3. Si è fatto assumere al parametro  $\tau$  i valori : 0,5; 0,55; 0,6; 0,65; 0,7; 0,75.

### 6.1.3 Sensibilità a $a$

Da 6.4 e 6.3 si può vedere come il parametro  $a$  influenza principalmente il comportamento alle alte scale, in entrambi i casi un aumento di  $a$  da una diminuzione delle curve.

Si è fatto assumere al parametro  $a$  i valori : 1; 1,05; 1,1; 1,15; 1,2; 1,25.

### 6.1.4 Sensibilità a $e_1$

Il parametro  $e_1$  è quello che è servito di più per avvicinare la curva studiata a quella di [1], lo abbiamo fatto variare poco, si vede comunque soprattutto in Figura 6.8 che questo valore ci fa variare molto la densità alle basse scale. Si è fatto assumere al parametro  $e_1$  i valori: 0,35; 0,36; 0,386; 0,395; 0,42.

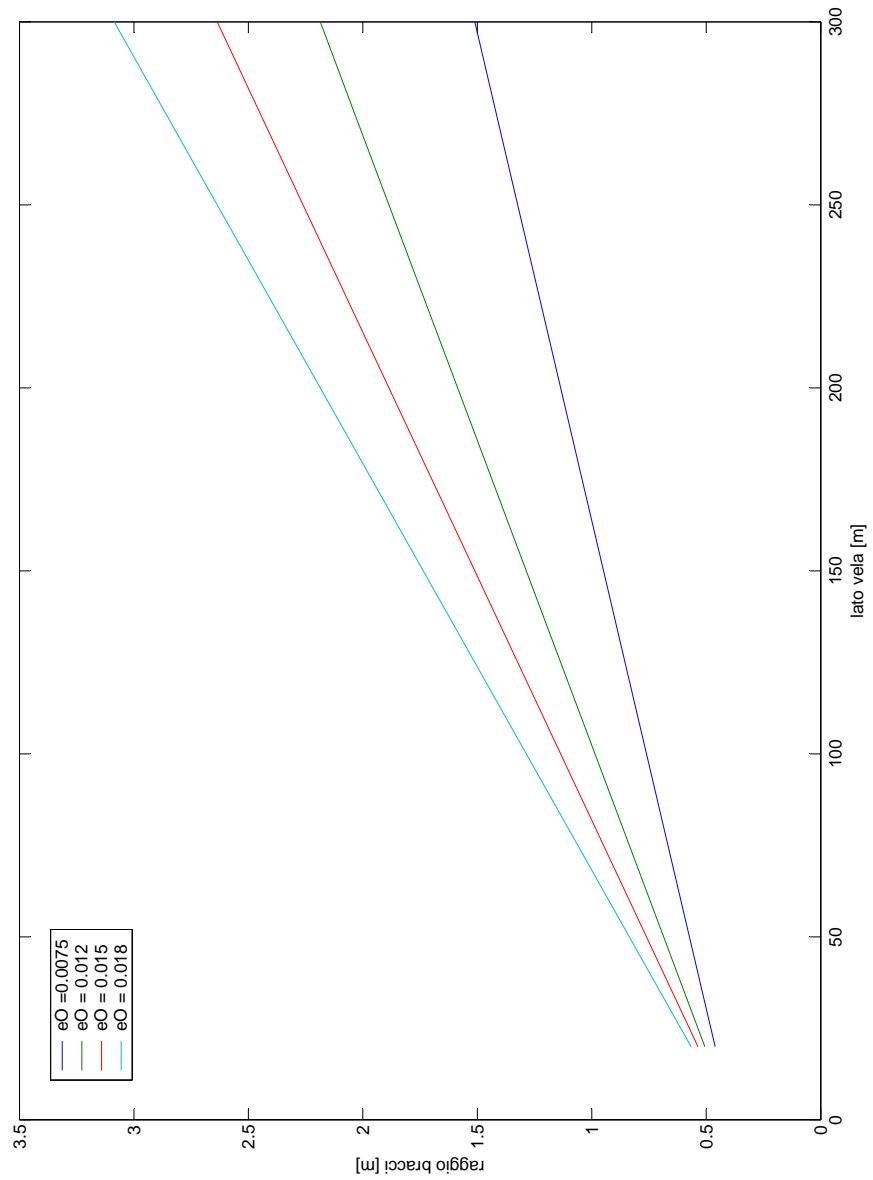


Figura 6.1: Sensibilità del legame tra raggio dell'albero e il lato della vela a  $e_0$

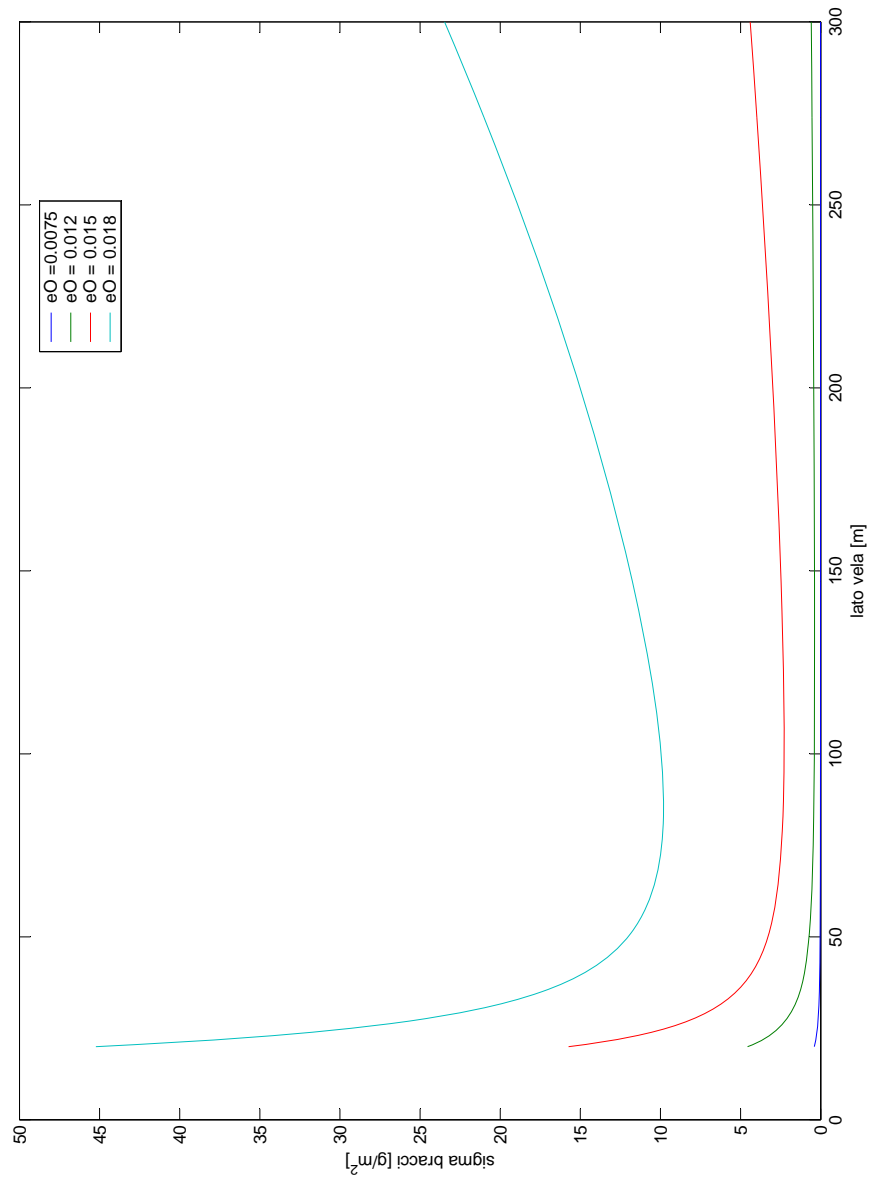
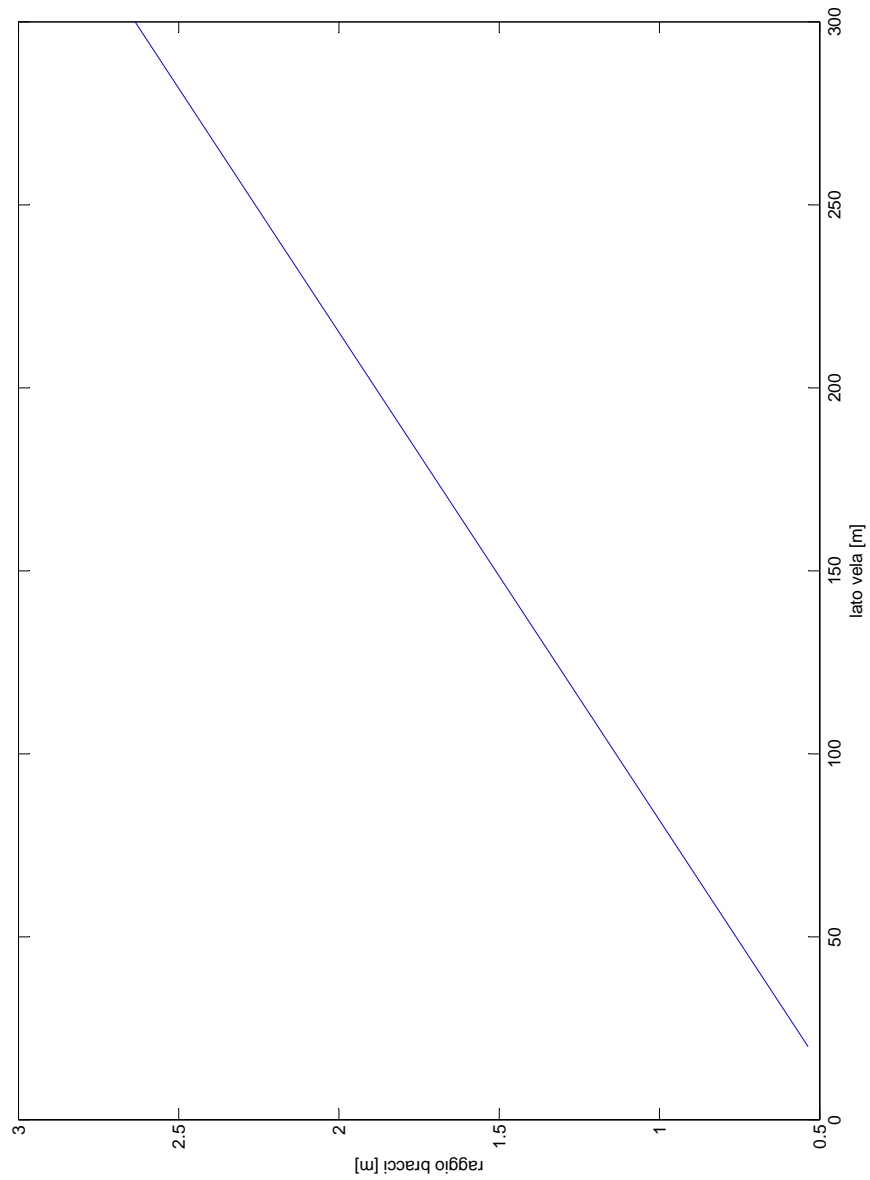


Figura 6.2: Sensibilità della  $\sigma_{tot}$  a  $e_0$



**Figura 6.3:** Sensibilità del legame tra raggio dell'albero e il lato della vela a  $\tau$

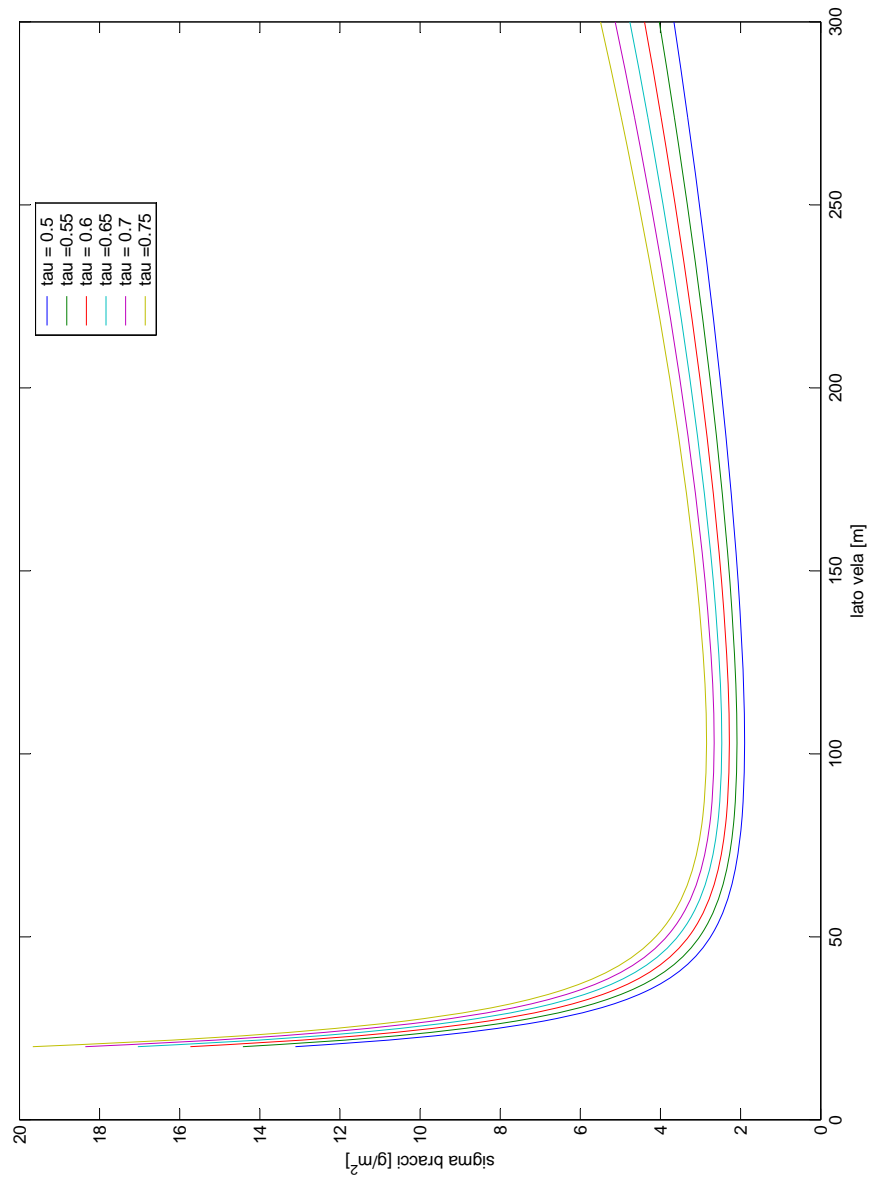
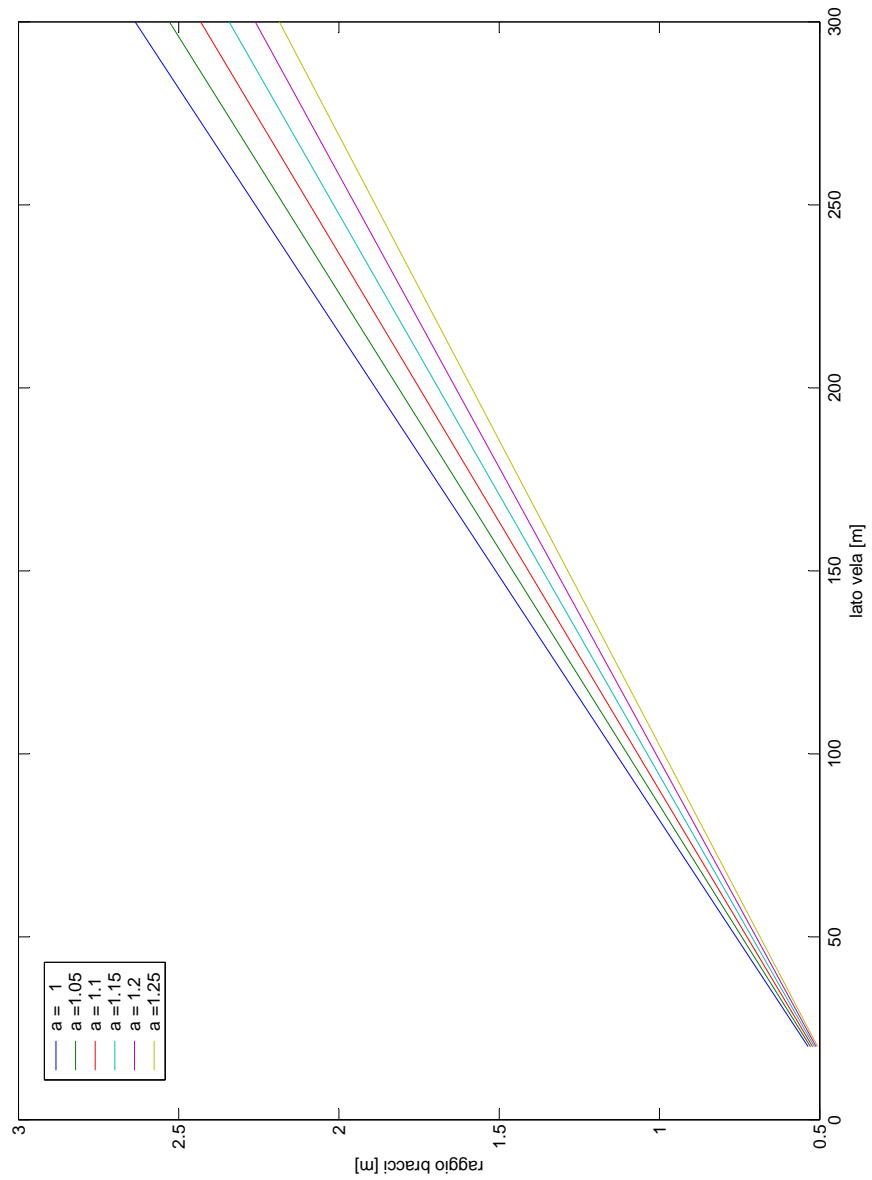


Figura 6.4: Sensibilità della  $\sigma_{tot}$  a  $\tau$



**Figura 6.5:** Sensibilità del legame tra raggio dell'albero e il lato della vela a  $a$

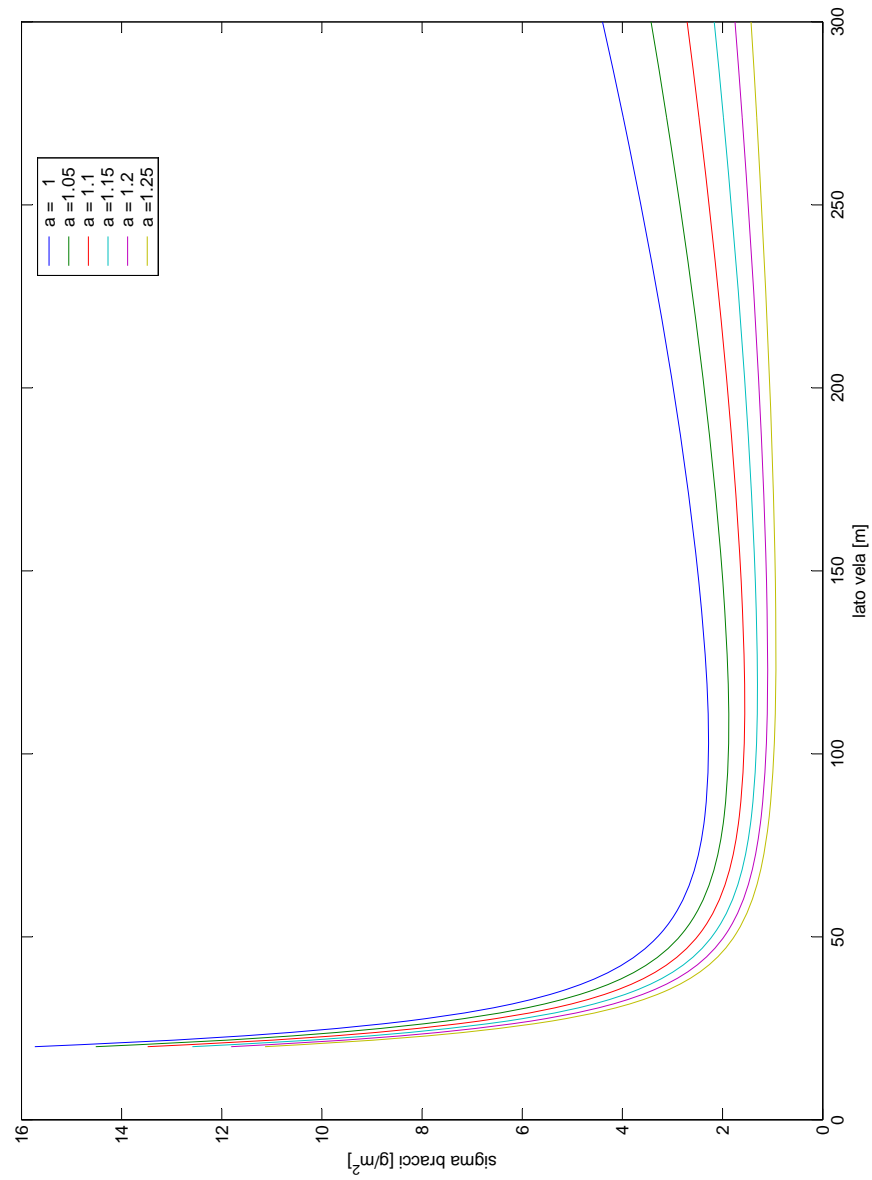


Figura 6.6: Sensibilità della  $\sigma_{tot}$  a  $a$

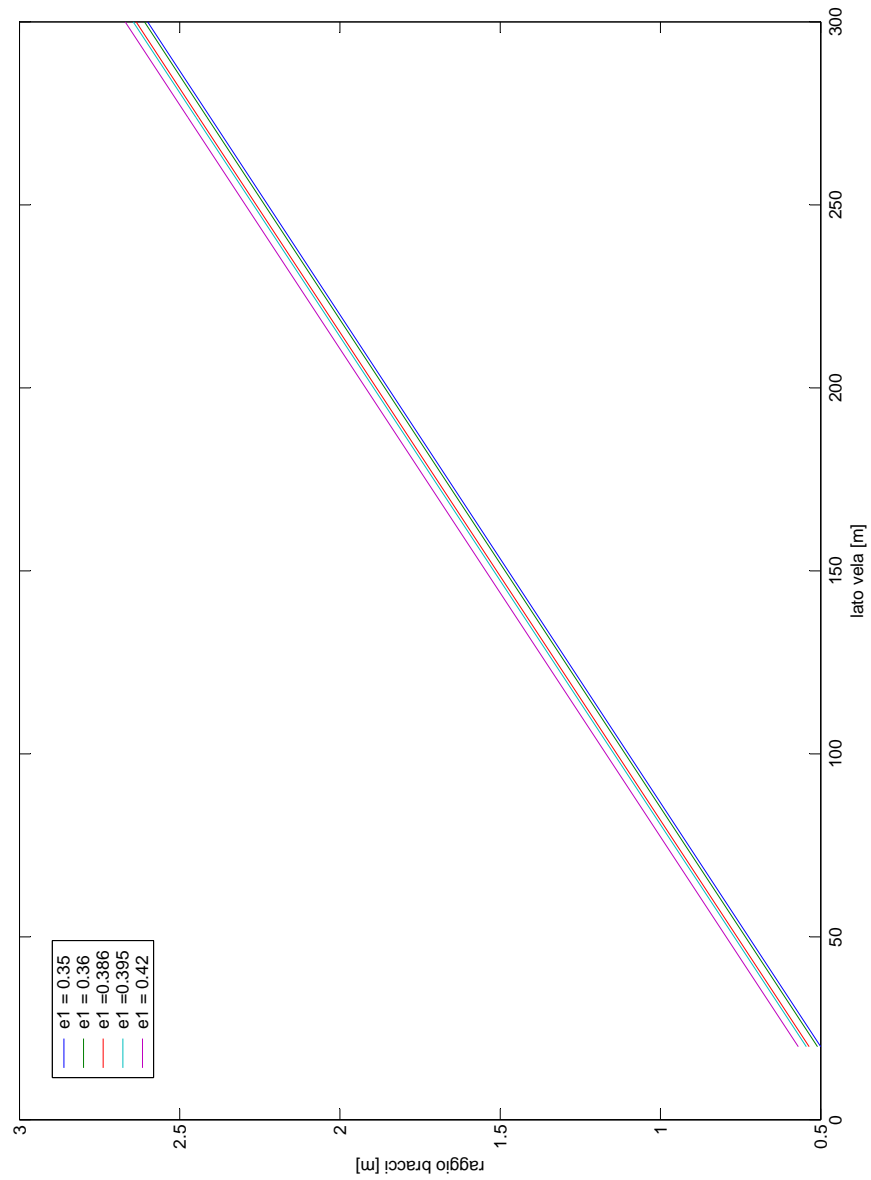


Figura 6.7: Sensibilità del legame tra raggio dell'albero e il lato della vela a  $e_1$

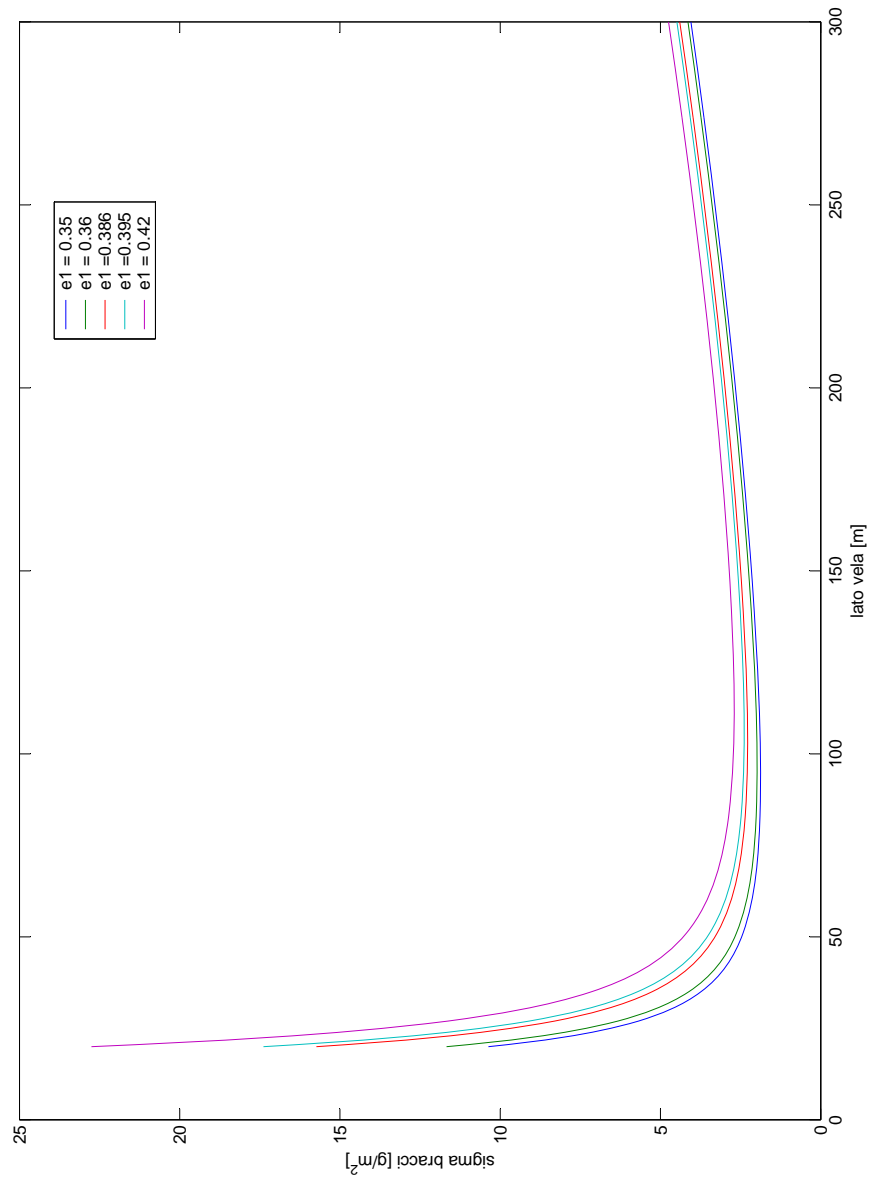


Figura 6.8: Sensibilità della  $\sigma_{tot}$  a  $e_1$

**Parte IV**

**Conclusioni**

## Capitolo 7

# CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

Lo scopo di questo lavoro di Tesi è stato quello di sviluppare lo studio di una formula parametrica per il calcolo del peso di una vela solare.

Avendo scelto un modello di vela quadrata, con bracci di tipo *COIL-ABLE* e membrana divisa in quattro triangoli collegati agli alberi e prive di rinforzi anti grinze, siamo arrivati alla conclusione che è possibile un semplice legame tra il peso della vela solare diviso l'area riflettente e il lato della vela stessa se si fanno le ipotesi:

- di considerare costanti le tensioni all'interno dei quadranti della membrana e tali da limitare le grinze di estremità, potendo così considerare costante il rendimento della vela;
- di considerare un fattore di sicurezza non variabile con la scala (in questo caso uguale a 3);
- di considerare un modello semplificato formato dai quattro alberi, i quattro triangoli di membrana e il corpo centrale della vela;
- di considerare le percentuali in peso delle parti, che non siano gli alberi, non variabili con la scala.

I possibili sviluppi futuri potrebbero essere:

- migliorare la taratura dei parametri cercando un maggior numero di esempi di vele già costruite o comunque in studio;
- aumentare la complessità del modello e quindi andare a studiare più approfonditamente quelle parti trattate meno accuratamente (esempio membrana e corpo centrale);
- provare se è possibile uno studio analogo con altri modelli di vela.

# Bibliografia

- [1] *Scalable Solar Sail Subsystem Design Considerations* Murphy D.M., Murphy T.W., AIAA 2002-1703, 43<sup>rd</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, Colorado, Apr. 22-25, 2002.
- [2] *Design Study of a Square Solar Sail Architecture* G.Greschik, M.M.Mikulas, AIAA 2001-1259, Center for Aerospace Structures, University of Colorado, CO.
- [3] *A Method to quantify the Thrust Degradation Effects of Structural Wrinkles in Solar Sails* T.W. Murphey, D.M. Murphy, M.M. Mikulas, A.L. Adler, AIAA 2002-1560, 43<sup>rd</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, Colorado, Apr. 22-25, 2002.
- [4] <http://www.aec-able.com>
- [5] *Advanced Membrane Materials for Improved Solar Sail Capabilities* C.Talley, W.Clayton, P.Gierow, J.McGee, J.Moore, AIAA 2002-1561, 43<sup>rd</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Denver, Colorado, Apr. 22-25, 2002.
- [6] *Design Rules and Scaling for Solar Sails* G.W.Zeiders, AIAA 2005-4553, 41<sup>st</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Tucson, Arizona, Aug. 10-13, 2005.
- [7] *A Rule of Thumb for the Suspension of Film Sheets without catenaries* G.Greschik, e al., AIAA 2003-1907, 44<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Norfolk, Virginia, Apr. 7-10, 2003.

- [8] *Theory of Elastic Stability* Timoshenko, S.P. e Gere, 2<sup>nd</sup> ediction, McGraw-Hill Publishing Company, 1961
- [9] *Buckling and Non-linear Response of Imperfect Three-legged Truss Columns* Dov Elyada, C.D. Babcock, California Istitute of Tecnology, Pasadena, California, AIAA 86-974.
- [10] *SALT:Second-order Augmentation of Lattice Trusses* M.E. McEachen, T.A. Trautt, D.M. Murphy, ABLE Engineering, Goleta CA, AIAA 2004-1729.