A3-Analisi matriciale di strutture trabeiformi

1. Generalità

Il modello più semplice utilizzato per descrivere la forma di un pezzo meccanico è il modello di 'trave'.
Esso nasce dal fatto che in un solido, di materiale perfettamente elastico, cilindrico o prismatico retto, limitato da due basi piane perpendicolari alle generatrici della superficie laterale, se sono nulle le forze di massa, se è completamente scarica e libera da vincoli la superficie laterale e se sono soggette a forze esterne distribuite solo le due basi, si riesce a risolvere rigorosamente il problema di Lamé [Ricci].
Tale problema, di importanza modesta, diviene fondamentale se ad esso si associa la genialissima idea del De Saint Venant che afferma:
la sostituzione di un dato sistema di forze applicato ad una delle basi del cilindro (o prisma) con un altro staticamente equivalente, cioè avente la stessa forza e la stessa coppia risultante, per quanto differente nel modo di applicazione e nella legge di ripartizione, non ha influenze sensibili nei punti del cilindro situati dalla base suddetta a distanze maggiori di un valore, il quale può essere anche relativamente molto piccolo. [1]
In pratica si possono studiare, con la teoria delle travi, solidi aventi una dimensione prevalente sulle altre (almeno quattro diametri) e con i carichi ed i vincoli applicati alle estremità del solido sottoposto a spostamenti piccoli rispetto alla dimensione della sezione retta.
E' opportuno sottolineare subito che in questo modo non si considerano tutti gli effetti locali provocati dai carichi, dai vincoli e da eventuali brusche variazioni della sezione retta.
Si ricordano alcuni esempi notevoli dell'applicazione di tale teoria.

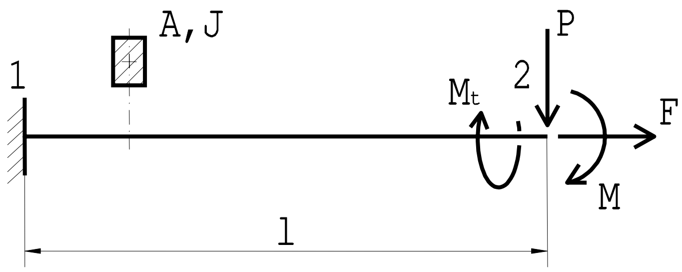

Fig.A3-1 Trave a sbalzo

Se la sezione 1 è impedita di ruotare e traslare, lo spostamento della sezione 2 rispetto alla 1 è dato da:
$\frac{Pl^3}{3EJ}, \frac{Ml^2}{2EJ}$ a seconda che nella estremità 2 sia applicata una forza trasversale od una coppia; la rotazione relativa essendo:

$\frac{Pl^2}{2EJ}, \frac{Ml}{EJ}$

Se nella sezione 2 è applicata una forza longitudinale, tale sezione si sposta assialmente di:

$\frac{Fl}{EA}$.

Se nella sezione 2 è applicata una coppia torcente, essa ruota rispetto alla 1 della quantità:

$\frac{M_t l}{GJ_p}$. E' ovvio il significato dei simboli impiegati.

Si ricordano i momenti di inerzia ed i moduli di resistenza di sezioni rettangolari e circolari - piene o cave-, frequenti nella costruzione delle macchine:

Tipo di sezione	Rettangolare	circolare piena	circolare cava
Momento di inerzia a flessione	$J_{xx} = \frac{bh^3}{12}$	$J_{xx} = \frac{\pi D^4}{64}$	$J_{xx} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$
Modulo di resistenza	$W_{xx} = \frac{bh^2}{6}$	$W_{xx} = \frac{\pi D^3}{32}$	$W_{xx} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}$
Momento di inerzia polare		$J_p = \frac{\pi D^4}{32}$	$J_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$
Modulo di resistenza polare		$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$	$W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$

2. Ricerca della matrice di rigidezza di una trave rispetto ad un riferimento intrinseco

Se si raggruppano in forma matriciale i valori delle componenti di movimento flessionali in una trave in funzione della forza e della coppia che le provocano, chiamando v lo spostamento e ϑ la rotazione si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} v \\ \vartheta \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{l^3}{3EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \\ \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l}{EJ} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} .$$

Per rendere più generale l'espressione è conveniente introdurre un sistema di riferimento con gli assi coincidenti con l'asse della trave, e con gli assi principali di inerzia della sezione retta:

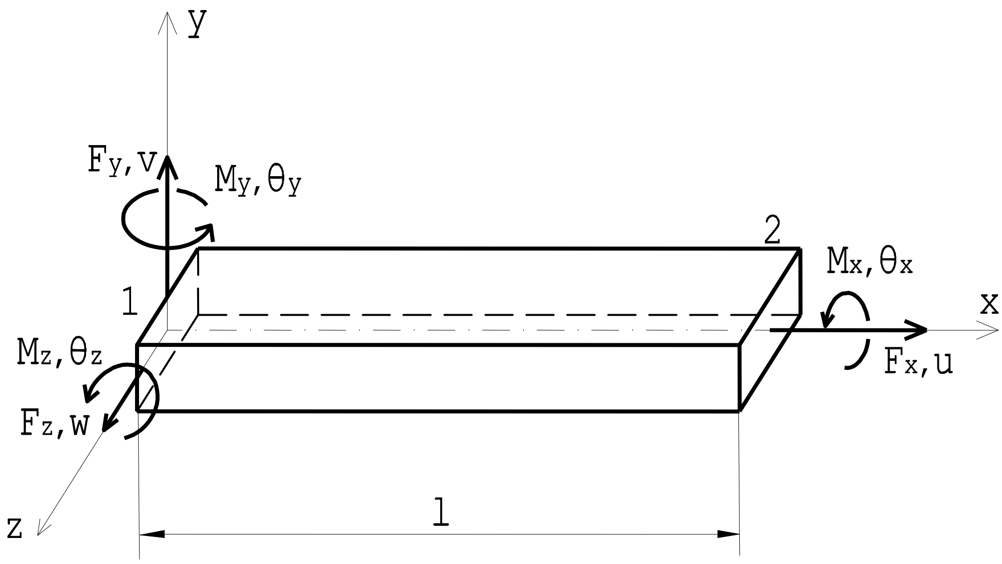

Fig.A3-2 Il sistema di riferimento ‘intrinseco’ e le convenzioni di segno

Per la trave di Fig.A3-3, sollecitata flessionalmente nel piano xy, si può scrivere che le componenti di movimento del nodo 1 rispetto al nodo 2 sono:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{l^3}{3EJ_z} & -\dfrac{l^2}{2EJ_z} \\ -\dfrac{l^2}{2EJ_z} & \dfrac{l}{EJ_z} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix}.$$

Fig.A3-3 Trave caricata nel piano

Questa matrice, detta di *flessibilità*, può essere invertita, cioè il sistema può essere scritto avendo le componenti di movimento come incognite. La matrice inversa viene chiamata matrice di *rigidezza*:

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{12\,EJ_z}{l^3} & \dfrac{6\,EJ_z}{l^2} \\ \dfrac{6\,EJ_z}{l^2} & \dfrac{4\,EJ_z}{l} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} = K_{11} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} .$$

Per rendere più generale il problema, e particolarizzarlo in un secondo tempo rispetto alle condizioni di vincolo alle quali è sottoposta la trave, si può scrivere la relazione che lega fra loro tutte le ‘forze’ esterne applicate nei nodi e tutte le componenti di movimento dette ‘spostamenti’, dove per ‘forze’ e per ‘spostamenti’ si intendono rispettivamente sia forze che coppie e sia spostamenti e rotazioni cioè, come si suole dire, le forze sono ‘forze generalizzate’ e gli spostamenti sono ‘spostamenti generalizzati’.
Per fare ciò, utilizzando le relazioni di equilibrio, si può scrivere:

$$F_{y1} + F_{y2} = 0$$

$$-F_{y1}l + M_{z1} + M_{z2} = 0 ,$$

equazioni che in forma matriciale diventano:

$$\begin{Bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ l & -1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix}$$

in cui, sostituendo al vettore delle forze l’espressione precedentemente trovata, si ha:

$$\begin{Bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = AK_{11} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-12\,EJ_z}{l^3} & \dfrac{-6\,EJ_z}{l^2} \\ \dfrac{-6\,EJ_z}{l^2} & \dfrac{4\,EJ_z}{l} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} = K_{21} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} .$$

Scrivendo le espressioni analoghe per il nodo 2 rispetto al nodo 1 si ottengono due matrici K_{12} e K_{22} analoghe alla K_{21} ed alla K_{11}. A questo punto si può scrivere l’espressione che lega fra loro le ‘forze’ agli ‘spostamenti’ per tutta la trave:

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} K_{11} K_{12} \\ K_{21} K_{22} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{12EJ_z}{l^3} & \dfrac{6EJ_z}{l^2} & \dfrac{-12EJ_z}{l^3} & \dfrac{6EJ_z}{l^2} \\ \dfrac{6EJ_z}{l^2} & \dfrac{4EJ_z}{l} & \dfrac{-6EJ_z}{l^2} & \dfrac{2EJ_z}{l} \\ \dfrac{-12EJ_z}{l^3} & \dfrac{-6EJ_z}{l^2} & \dfrac{12EJ_z}{l^3} & \dfrac{-6EJ_z}{l^2} \\ \dfrac{6EJ_z}{l^2} & \dfrac{2EJ_z}{l} & \dfrac{-6EJ_z}{l^2} & \dfrac{4EJ_z}{l} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} .$$

Se si vogliono legare fra loro tutte le forze esterne a tutte le componenti di movimento la matrice che risulta è la seguente:

$$
\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} =
\left|\begin{matrix}
\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{-12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{-6EJ_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ_p}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{l} & 0 & \frac{-6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} \\
-\frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EJ_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{-12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-GJ_p}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_p}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_y}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_z}{l} & 0 & \frac{-6EJ_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_z}{l}
\end{matrix}\right|
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vartheta_{x1} \\ \vartheta_{y1} \\ \vartheta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vartheta_{x2} \\ \vartheta_{y2} \\ \vartheta_{z2} \end{Bmatrix}
$$

Essa mette in relazione il vettore delle forze con quello degli spostamenti considerati nei nodi 1 e 2.
L’equazione si scrive in genere nella forma:

$$F = Ku$$

La matrice di rigidezza K esprime le forze che nascono alle estremità della trave per effetto di spostamenti unitari impressi agli estremi. Tale matrice è singolare il che, dal punto di vista fisico, vuol dire che occorre riferire gli spostamenti e le rotazioni a qualche sezione vincolata, cioè occorre toglierle i gradi di libertà, altrimenti si ha una trave labile.

3. La matrice di rigidezza rispetto ad un riferimento generale

Nota la matrice K riferita agli assi principali della trave stessa, si può trovare la matrice di rigidezza di una trave comunque orientata trasformando i vettori delle forze e degli spostamenti dal riferimento intrinseco x,y,z a quello scelto X,Y,Z.
Detta T la matrice (ortogonale) di rotazione degli assi, indicando con F e u i vettori delle forze e degli spostamenti rispetto al riferimento scelto, e con F' e u' quelli rispetto al riferimento intrinseco, tali che $F' = TF$ e $u' = Tu$, l’equazione forze-spostamenti diventa:

$$F = T^{-1}K'Tu$$

con

$$T = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \quad , \quad \lambda = \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{vmatrix}$$

in cui $\alpha_{x.}......\gamma_z$ sono i coseni direttori degli assi del riferimento intrinseco rispetto alla terna scelta.

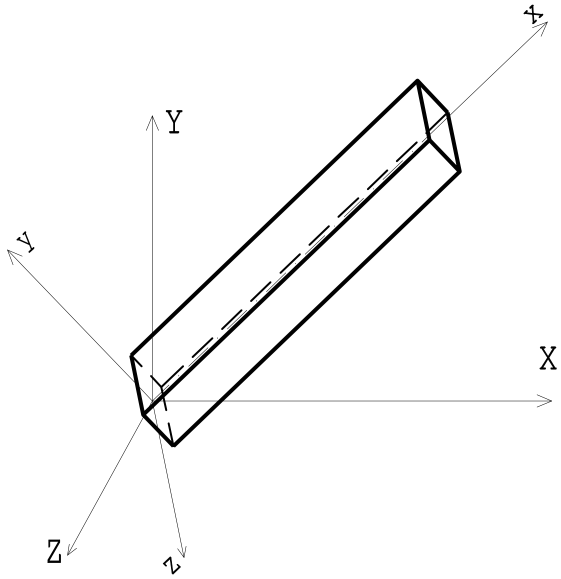

Fig. A3-4 Sistemi di riferimento: intrinseco x, y, z e globale X, Y, Z.

Dato che la trasposta di una matrice di coseni direttori è uguale all'inversa (matrice ortogonale) si ha:
$F = T^T K' T u$.

3. La matrice di rigidezza di un insieme di travi nello spazio

Per scrivere la matrice di rigidezza di una struttura occorre definire un sistema di riferimento unico, detto riferimento globale, al quale riferire le forze e gli spostamenti dei singoli nodi ai quali concorrono varie travi.
Per una struttura si determinano così le matrici di rigidezza di ogni trave rispetto al riferimento intrinseco dell'asta che vanno trasformate nel riferimento globale.
In questo sistema, gli spostamenti del singolo nodo al quale concorrono le varie travi sono gli stessi per ogni trave, quindi si può scrivere un unico vettore spostamento.
Per queste travi fra loro collegate e caricate solo nei nodi si può scrivere l'equazione di equilibrio delle forze nei nodi e cioè che la somma di tutte le forze si annulli nel nodo, ovvero che la somma di tutte le forze interne sia uguale alle corrispondenti forze esterne.
$\sum F = 0 \Rightarrow \sum F_i = F_e$

Per l'intera struttura si può quindi avere una espressione analoga a quella scritta per la singola trave $F = Ku$, ove il vettore F è il vettore delle forze esterne, K la matrice di rigidezza che deriva dalla sovrapposizione delle parti comuni delle varie matrici di rigidezza delle singole travi $T^T K' T$.
In pratica si spezza la matrice di rigidezza della singola asta in quattro submatrici $K = \begin{vmatrix} K_1 K_2 \\ K_3 K_4 \end{vmatrix}$ che fanno riferimento alle forze ed agli spostamenti nei due nodi estremi; la prima fa riferimento alle forze del primo nodo con gli spostamenti del nodo stesso, la seconda alle forze del primo nodo con gli spostamenti del secondo nodo, la terza con le forze del secondo nodo e gli spostamenti del primo nodo, la quarta le forze del secondo nodo con gli spostamenti del secondo nodo. Imporre che la somma delle forze interne sia uguale alle forze esterne equivale a sommare i termini corrispondenti delle varie submatrici dopo averle collocate al loro posto, in funzione della numerazione dei singoli nodi, nella matrice di rigidezza globale.

$$K = \begin{vmatrix} .... \\ ...K_1.......K_2... \\ .... \\ ...K_3.......K_4... \\ .... \end{vmatrix}$$

Per rendersi meglio conto di come si assembla una matrice si può scrivere per esteso quella di una trave continua formata da due tronchi.

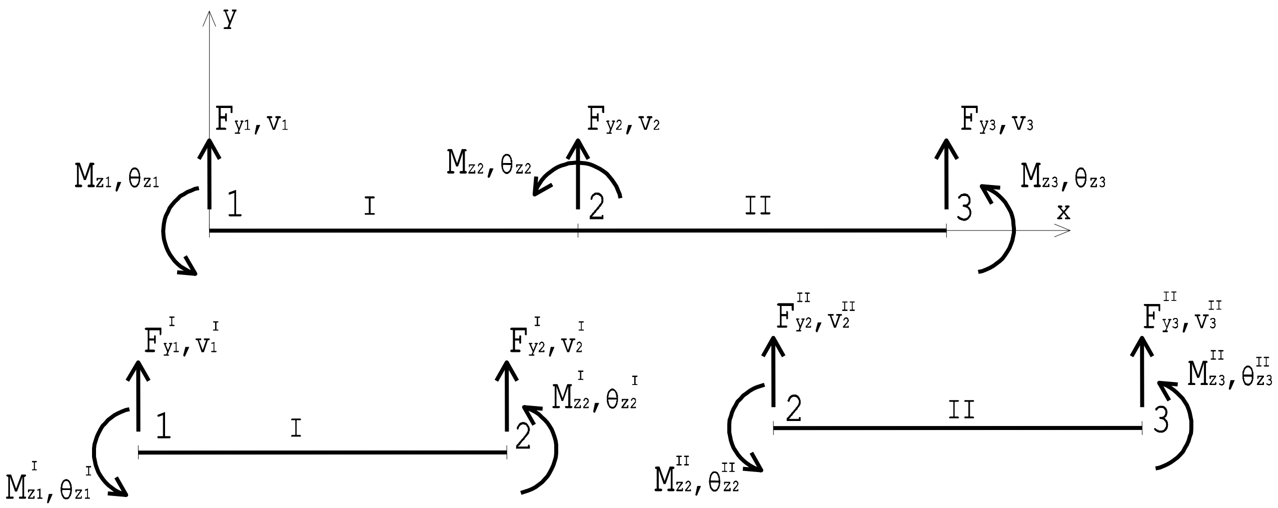

Fig.A3-5 Trave continua formata da due tronchi

Si possono scrivere per le due aste i sistemi di equazioni che legano fra loro le forze e gli spostamenti:

$$\begin{Bmatrix} F_{y1}^{I} \\ M_{z1}^{I} \\ F_{y2}^{I} \\ M_{z2}^{I} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{12EJ_z^I}{l^{I3}} & \dfrac{6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{-12EJ_z^I}{l^{I3}} & \dfrac{6EJ_z^I}{l^{I2}} \\ \dfrac{6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{4EJ_z^I}{l^{I}} & \dfrac{-6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{2EJ_z^I}{l^{I}} \\ \dfrac{-12EJ_z^I}{l^{I3}} & \dfrac{-6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{12EJ_z^I}{l^{I3}} & \dfrac{-6EJ_z^I}{l^{I2}} \\ \dfrac{6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{2EJ_z^I}{l^{I}} & \dfrac{-6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{4EJ_z^I}{l^{I}} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^I \\ \vartheta_{z1}^I \\ v_2^I \\ \vartheta_{z2}^I \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{y2}^{II} \\ M_{z2}^{II} \\ F_{y3}^{II} \\ M_{z3}^{II} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{12EJ_z^{II}}{l^{II3}} & \dfrac{6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{-12EJ_z^{II}}{l^{II3}} & \dfrac{6EJ_z^{II}}{l^{II2}} \\ \dfrac{6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{4EJ_z^{II}}{l^{II}} & \dfrac{-6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{2EJ_z^{II}}{l^{II}} \\ \dfrac{-12EJ_z^{II}}{l^{II3}} & \dfrac{-6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{12EJ_z^{II}}{l^{II3}} & \dfrac{-6EJ_z^{II}}{l^{II2}} \\ \dfrac{6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{2EJ_z^{II}}{l^{II}} & \dfrac{-6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{4EJ_z^{II}}{l^{II}} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_2^{II} \\ \vartheta_{z2}^{II} \\ v_3^{II} \\ \vartheta_{z3}^{II} \end{Bmatrix}$$

Dall'equilibrio del nodo centrale si ha che la somma delle forze interne deve essere uguale alle forze esterne e cioè che

$F_{y2} = F_{y2}^{I} + F_{y2}^{II}$ e che $M_{z2} = M_{z2}^{I} + M_{z2}^{II}$

per congruenza deve essere inoltre che $v_2^I = v_2^{II} = v_2$ e $\vartheta_{z2}^{I} = \vartheta_{z2}^{II} = \vartheta_{z2}$.

Per gli altri nodi le forze esterne coincidono con quelle interne essendo nodi di estremità. Sviluppando e raggruppando poi in forma matriciale si ha:

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{12EJ_z^I}{l^{I3}} & \dfrac{6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{-12EJ_z^I}{l^{I3}} & \dfrac{6EJ_z^I}{l^{II2}} & 0 & 0 \\ \dfrac{6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{4EJ_z^I}{l^{I}} & \dfrac{-6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{2EJ_z^I}{l^{I}} & 0 & 0 \\ \dfrac{-12EJ_z^I}{l^{I3}} & \dfrac{-6EJ_z^I}{l^{I2}} & \left(\dfrac{12EJ_z^I}{l^{I3}} + \dfrac{12EJ_z^{II}}{l^{II3}}\right) & \left(\dfrac{-6EJ_z^I}{l^{I2}} + \dfrac{6EJ_z^{II}}{l^{II2}}\right) & \dfrac{-12EJ_z^{II}}{l^{II3}} & \dfrac{6EJ_z^{II}}{l^{II2}} \\ \dfrac{6EJ_z^I}{l^{I2}} & \dfrac{2EJ_z^I}{l^{I}} & \left(\dfrac{-6EJ_z^I}{l^{I2}} + \dfrac{6EJ_z^{II}}{l^{II2}}\right) & \left(\dfrac{4EJ_z^I}{l^{I}} + \dfrac{4EJ_z^{II}}{l^{II}}\right) & \dfrac{-6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{2EJ_z^{II}}{l^{II}} \\ 0 & 0 & \dfrac{-12EJ_z^{II}}{l^{II3}} & \dfrac{-6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{12EJ_z^{II}}{l^{II3}} & \dfrac{-6EJ_z^{II}}{l^{II2}} \\ 0 & 0 & \dfrac{6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{2EJ_z^{II}}{l^{II}} & \dfrac{-6EJ_z^{II}}{l^{II2}} & \dfrac{4EJ_z^{II}}{l^{II}} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vartheta_{z1} \\ v_2 \\ \vartheta_{z2} \\ v_3 \\ \vartheta_{z3} \end{Bmatrix}$$

4. L'imposizione dei vincoli

Una volta definita la matrice di rigidezza dell'intera struttura rispetto al riferimento globale, per risolvere il sistema occorre imporre i vincoli.

Nel caso di vincoli rigidi si avranno delle equazioni del tipo $u_i = 0$. Queste equazioni si possono posizionare all'interno della equazione generale con una modifica della matrice di rigidezza: si azzerano la riga e la colonna corrispondenti alla componente di movimento impedita, sostituendo un valore unitario al termine sulla diagonale principale. Inoltre si posiziona uno 0 nel corrispondente termine del vettore delle forze. In questo modo il sistema non va riordinato. L'operazione può tuttavia portare ad un malcondizionamento della matrice, se la matrice non é stata precedentemente normalizzata. Il vettore delle incognite può essere determinato con le solite procedure di soluzione dei sistemi di equazioni lineari.

5. Il calcolo degli alberi come travi continue

Questo caso può essere utilmente considerato per fare controlli sull'assemblaggio della matrice di rigidezza globale. Infatti la matrice di rigidezza di ogni singolo tronco va posizionata nella matrice di rigidezza globale dopo averla spostata del numero di gradi di libertà considerati per ogni nodo e sommata a quella precedentemente determinata.
Il controllo può essere fatto anche globalmente pensando che ogni colonna della matrice di rigidezza deve dare luogo ad una sistema di forze equilibrato. E' questo il caso in cui viene attivata una sola componente di movimento (quella corrispondente alla colonna) e viene trovato il sistema di forze interne corrispondente.

6. Esercizi proposti

Si propone di trovare la deformata di alcuni alberi e di alcune strutture trabeiformi.

6.1 Dato l'albero schematizzato in figura, calcolarne la linea elastica.

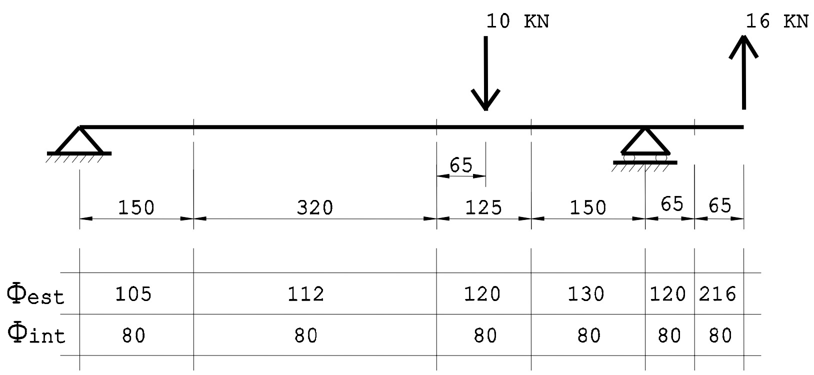

Fig.A3-6 Dal disegno schematico di un albero come trave continua (quote in mm). La sezione della trave è circolare cava con i diametri esterni ed interni riportati, il materiale è acciaio.

6.2 Calcolare lo spostamento del nodo 2 per una struttura spaziale caricata da una coppia torcente C=300 Nm a metà dell'asta 4-2. I nodi hanno le seguenti coordinate in mm:

$1 \equiv (100{,}400{,}0)$
$2 \equiv (500{,}500{,}500)$
$3 \equiv (0{,}700{,}500)$
$4 \equiv (0{,}0{,}500)$
Le aste hanno sezione circolare piena con diametro di 40mm, il materiale è acciaio Fe 510.

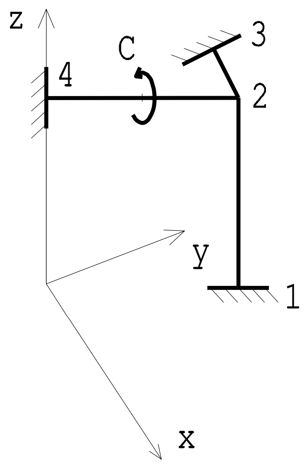

Fig.A3-7 Disegno schematico della struttura

6.3 Una trave appoggiata di sezione rettangolare di 20x40mm di 3 m di luce realizzata in acciaio Fe340 è soggetta ad un carico uniformemente ripartito. Calcolare il carico capace di dare inizio allo snervamento ed il carico massimo teorico (sezione completamente plastica) che può sopportare la sezione nell'ipotesi che il materiale si comporti in modo elastico-perfettamente plastico.
Calcolare poi la deformata agli 8/10 del carico di collasso nell'ipotesi che le sezioni rimangano piane.

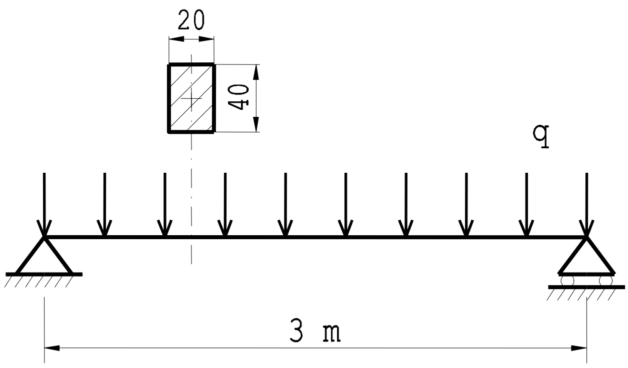

Fig.A3-8 Disegno schematico della trave appoggiata

6.4 Rilevare dal vero la forma della freccia di una gru da cantiere pensata incernierata alla torre (supposta rigida) in corrispondenza dei correnti inferiori e con lo strallo pure incernierato alla cuspide (supposta rigida). Ipotizzare le sezioni dei correnti e dei traversi e calcolare la freccia sotto un carico di 2000 N posto all'estremità. Osservato poi il giro delle funi, definire meglio i carichi esterni per una certa posizione del carrello porta bozzello.

7. Bibliografia

[1] Ricci C.A.
Meccanica applicata alle costruzioni
E.P.S.A. Editrice Politecnica, Napoli, 1942

[2] Prezmieniecki J.S.
Theory of Matrix Structural Analysis
McGraw-Hill Book Co., 1968

[3] Martin H.C.
Introduction of Matrix Methods of Structural Analysis
McGraw-Hill Book Co., 1951

[4] Livesley
Matrix Methods of Structural Analysis
Pergamon Press

[5] Beaufait F.W., Rowan W.H.,Hackett R.M.
Computer Methods of Structural Analysis
Prentice-Hall Inc, Englewood Cliff, 1970